ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

20

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1897.
CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

ZUR LEHRE VON DEN HYPERELLIPTISCHEN INTEGRALEN

VON

PAUL EPSTEIN

in STRASSBURG.

Bekanntlich hat Herr WEIERSTRASS in folgender Weise ein System zusammengehöriger hyperelliptischer Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung definiert.[1]

Es sei

$$s = \sqrt{z - e_0 . z - e_1 \ldots z - e_{2p+1}} = \sqrt{f(z)}$$

die dem hyperelliptischen Gebilde zu Grunde liegende Irrationalität, (z, s) und (ζ, σ) zwei Punkte der zugehörigen zweiblättrigen Fläche, und

$$g_1(z), \quad g_2(z), \ldots, g_p(z),$$
$$g_{p+1}(z), g_{p+2}(z), \ldots, g_{2p}(z)$$

seien zwei Reihen ganzer Funktionen von z — die Funktionen der ersten Reihe höchstens vom Grade $p - 1$, die der zweiten vom Grade $2p$ —, die die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d}{d\zeta}\frac{s+\sigma}{(z-\zeta)2s} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{g_{p+\nu}(\zeta)}{\sigma}\frac{g_\nu(z)}{s} = \frac{d}{dz}\frac{s+\sigma}{(\zeta - z)2\sigma} - \sum_{\nu=1}^{p}\frac{g_{p+\nu}(z)}{s}\frac{g_\nu(\zeta)}{\sigma}$$

---

[1] Vgl. WILTHEISS, *Über die partiellen Differentialgleichungen zwischen den Ableitungen der hyperelliptischen Thetafunktionen.* Crelles Journal Bd. 99. Ferner BOLZA, *On the Logarithmic Derivatives of Hyperelliptic σ-Functions.* American Journal of Mathematics Bd. 17. Letztere Abhandlung erschien nach Vollendung vorliegender Arbeit.

identisch erfüllen. Dann bilden

$$\int \frac{g_\nu(z)}{s} dz \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

das System der Fundamentalintegrale erster Gattung,

$$\int \frac{g_{p+\nu}(z)}{s} dz \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

das der Fundamentalintegrale zweiter Gattung.

Bei dieser Definition bleiben von den $p(3p+1)$ Coeffizienten der Funktionen $g_\nu(z)$, $g_{p+\nu}(z)$ noch eine grosse Menge frei verfügbar. Im besonderen kann man die Integranden erster Gattung willkürlich annehmen und auch dann bleibt noch ein Teil der Coeffizienten der Funktionen $g_{p+\nu}(z)$ unbestimmt. Über diese übrig bleibenden Coeffizienten hat nun Herr KLEIN von invariantentheoretischen Gesichtspunkten geleitet dadurch verfügt, dass er in der mit (1) gleichwertigen Relation

$$\frac{d}{d\zeta}\frac{s+\sigma}{(z-\zeta)2s} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{g_{p+\nu}(\zeta)}{\sigma}\frac{g_\nu(z)}{s} = \frac{s\sigma + F(z,\zeta)}{2(z-\zeta)^2 s\sigma}, \tag{2}$$

worin $F(z, \zeta)$ eine in z und ζ symmetrische ganze Funktion vom Grade $p+1$ bedeutet, die die Bedingungen erfüllt

$$F(z, z) = f(z), \qquad \left(\frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=z} = \frac{1}{2} f'(z),$$

für $F(z, \zeta)$ die $(p+1)^{\text{te}}$ Polare von $f(z)$ in Bezug auf ζ ansetzte und dieser Festsetzung ist dann Herr WILTHEISS in seinen späteren Arbeiten gefolgt.

Nun finden wir aber in der ersten Abhandlung von Herrn WILTHEISS[1] eine Form der Funktionen $g_\nu(z)$, $g_{p+\nu}(z)$ erwähnt, die er sehr bemerkenswert nennt, die aber anscheinend noch nicht einer eingehenderen Untersuchung unterworfen worden sind. Diese Funktionen entspringen aus der Entwicklung von $\frac{s}{z-\zeta}$ als Funktion von z im Unendlichen und sie sind es, die den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit gebildet haben. Die

[1] WILTHEISS, a. a. O., S. 245.

mit ihrer Hülfe gebildeten Integrale — wir nennen sie der Kürze halber *Hauptintegrale* — zeichnen sich erstens durch ein ausserordentlich einfaches Verhalten im Unendlichen aus, das es möglich macht, jedes zum hyperelliptischen Gebilde gehörige Integral, dessen Unstetigkeiten bekannt sind, sofort durch die Hauptintegrale auszudrücken, vor allem aber erscheinen sie ganz besonders geeignet, *um bei Untersuchung der Abhängigkeit hyperelliptischer Integrale von den Verzweigungspunkten als Grundlage zu dienen.*

Im ersten Teil der Arbeit werden zunächst einige Eigenschaften der ganzen Funktionen φ, mittels deren die Hauptintegrale gebildet werden, abgeleitet. Aus diesen ergibt sich dann in § 3, dass die Derivierten sämtlicher Hauptintegrale nach den Verzweigungspunkten sich in einfachster Weise durch die Derivierten $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ eines einzigen Hauptintegrals ω ausdrücken, woraus dann weiter partielle Differentialgleichungen für die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale fliessen. In § 4 werden die Integrale $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ durch die Hauptintegrale dargestellt, das Integral dritter Gattung eingeführt, das nur in den unendlich fernen Gebieten und einem Punkt im Endlichen unstetig wird und aus diesem das algebraisch normierte Integral dritter Gattung mit Vertauschbarkeit von Argument und Parameter gewonnen. In § 5 werden die Weierstrass'schen Relationen für die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale abgeleitet und gezeigt, dass die in ihnen auftretenden bilinearen Verbindungen als Periodicitätsmoduln von $2p$ Integralen A_μ und B_μ aufgefasst werden können, die ein zweites System von Fundamentalintegralen bilden. Diese Integrale sind selbst wieder Periodicitätsmoduln des Integrals dritter Gattung. Mit Hülfe der Weierstrass'schen Relationen wird dann der Wert der Determinante $2p^{\text{ten}}$ Grades ermittelt, die die Verallgemeinerung der Legendre'schen Relation für $p = 1$ darstellt. Am Schluss dieses Paragraphen werden wir dazu geführt, die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen bei einer gegebenen Reihe von ganzen Funktionen $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, ... der Ausdruck $\frac{1}{\psi_k(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\psi_k(z)}{s}\right)$ für jedes k denselben Wert hat. Es besteht nämlich der merkwürdige Umstand, dass die Integranden sämtlicher in dieser Arbeit auftretenden Integrale erster und zweiter Gattung, diejenigen der

Hauptintegrale, der Integrale A_μ und B_μ und der Normalintegrale erster und zweiter Gattung diese Eigenschaft besitzen.

Im zweiten Teil wird zu den bekannten Riemann'schen Normalintegralen erster Gattung als notwendige Ergänzung ein System von Normalintegralen zweiter Gattung hinzugefügt und eine Reihe von $2p+2$ Integralen T_i aufgestellt, die zu den Derivierten dieser Normalintegrale in ebenderselben Beziehung stehen, wie die Integrale $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ zu den Derivierten der Hauptintegrale. Es gelingt dabei zu der eleganten von Herrn THOMAE gefundenen Relation zwischen den Derivierten der Periodicitätsmoduln $a_{\mu\nu}$ der Normalintegrale 1. Gattung und deren Integranden eine Reihe gleichartiger Relationen hinzuzufügen und als gemeinsame Quelle derselben ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nachzuweisen, zu deren Lösungen die Integrale T_i gehören. Ein sehr allgemeiner Satz, der für je zwei Lösungssysteme dieser partiellen Differentialgleichungen besteht, führt dazu, eine enge Beziehung zwischen den Integralen T_i und den Derivierten des transcendent normierten Integrals dritter Gattung aufzufinden und eine Spezialisierung dieser Beziehung liefert eine Funktion Ω von z, die genau der Funktion $Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}$ entspricht, mit deren Hülfe Herr KLEIN seine Primform bildet. Eine kurze Erörterung des Zusammenhangs dieser Funktion Ω mit der hyperelliptischen Thetafunktion bildet den Schluss der Arbeit.

Schliesslich soll nicht unerwähnt bleiben, dass Verfasser die Anregung zu dieser Arbeit, nämlich die Kenntnis der Funktionen φ und der mit ihrer Hülfe zu bildenden Integrale einer Vorlesung von Herrn CHRISTOFFEL über elliptische Integrale (Winter 1890/91) verdankt, doch hat Herr CHRISTOFFEL sich darauf beschränkt, das Verhalten der Integrale im Unendlichen anzugeben, und hat ohne Beweis die wichtige Gleichung (7) in § 2 mitgeteilt.

ERSTER TEIL.

Die Hauptintegrale und ihre Derivierten nach den Verzweigungspunkten.

§ 1. *Definition des hyperelliptischen Gebildes.*

Der Theorie der hyperelliptischen Integrale legen wir die Irrationalität

$$s = \sqrt{f(z)}$$

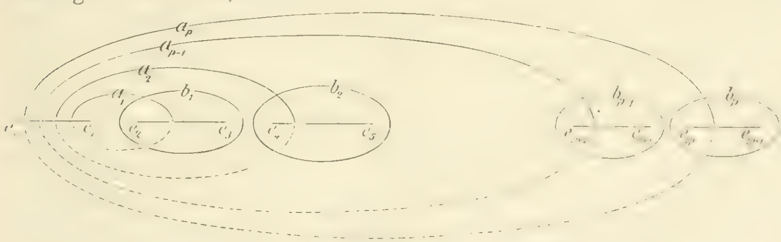
zu Grunde, wo $f(z)$ die ganze Funktion $2p + 2^{\text{ten}}$ Grades von z:

$$f(z) = z - e_0 \,.\, z - e_1 \,.\, z - e_2 \ldots z - e_{2p+1}$$

bedeutet.

Jede zum Rationalitätsbereich (z, s) gehörige Funktion heisst eine »Funktion der Klasse», das Integral einer solchen Funktion ein »Integral der Klasse».

Alle Funktionen der Klasse sind einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche T mit den Verzweigungspunkten $e_0, e_1, \ldots, e_{2p+1}$ eindeutig zugeordnet. Die Durchsetzungslinien mögen zwischen e_0 und e_1, e_2 und $e_3, \ldots, e_{2p}$ und e_{2p+1} verlaufen, und die Fläche möge einfach zusammenhängend gemacht werden durch ein Querschnittsystem, dessen Anlage aus der Figur leicht ersichtlich ist.



Das System von Herrn Prym [1] geht aus diesem hervor, indem man

[1] Prym, *Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche.* 1866.

die Querschnitte (a) und (b) vertauscht.[1] Die so mit Querschnitten versehene Fläche nennen wir die Fläche T'. Die Querschnitte $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sollen *Querschnitte erster Art,* die $b_1, b_2, \ldots, b_p$ *Querschnitte zweiter Art* heissen. Der Verzweigungspunkt e_0 fällt ausserhalb des Querschnittsystems und heisst »freier Verzweigungspunkt».

Bezüglich der Bezeichnungen sei folgendes bemerkt: Den variablen Punkt (z, s) der Fläche T' bezeichnen wir durchweg mit x; dazu kommt vielfach ein zweiter Punkt ξ und in diesem soll $z = \zeta$, $s = +\sigma$ sein. Die unendlich fernen Gebiete unterscheiden wir durch die Bezeichnung ∞_1 und ∞_2.

In der Bezeichnung der Indices sind in der ganzen Arbeit die folgenden Festsetzungen consequent durchgeführt worden:

1) Die Indices i, k können alle ganzzahligen Werte von 0 bis $2p+1$ annehmen.[2]

2) Die Indices n, l können alle ganzzahligen Werte von $-p$ bis $+p$ annehmen.

3) Die Indices λ, μ, ν können alle ganzzahligen Werte von 1 bis p annehmen.

§ 2. *Die Funktionen* φ.

Die Funktion s verhält sich ausserhalb der Verzweigungspunkte überall wie eine eindeutige Funktion von z, kann also in der Umgebung eines jeden Punktes ξ der Fläche T, der nicht Verzweigungspunkt ist, nach ganzen Potenzen von $z - \zeta$ entwickelt werden. In den unendlich fernen Gebieten schreitet die Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ fort. Setzt man dem entsprechend

$$(1) \qquad \text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad s = \pm z^{p+1}\left(1 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \frac{\alpha_3}{z^3} + \ldots\right),$$

[1] Natürlich sind die Verzweigungspunkte in der Figur nur der Übersichtlichkeit wegen in grader Linie angenommen. Die Schnitte $c_1, \ldots, c_{p-1}$, die nötig sind, um die Fläche vollends einfach zusammenhängend zu machen, sind weggelassen, da sie bekanntlich für die Theorie der Integrale irrelevant sind.

[2] Wo i nicht Index ist, bedeutet es stets $\sqrt{-1}$.

so ist leicht einzusehen, dass die $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ganze homogene Funktionen der Verzweigungspunkte sind.

Mit Hülfe dieser Coeffizienten a bilden wir die Funktionen:

$$\varphi_k(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + \ldots + a_k. \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{2}$$

Diese Funktionen φ bilden die Grundlage der weiteren Untersuchungen und wir leiten zunächst eine Anzahl Sätze für sie ab, von denen wir in der Folge Gebrauch zu machen haben.

Es ist

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \frac{s}{z-\zeta} = \frac{s}{z}\left(1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{\zeta^2}{z^2} + \ldots\right),$$

also mit Benutzung der Entwicklung (1)

$$\frac{s}{z-\zeta} = \pm z^p \left[1 + \frac{\varphi_1(\zeta)}{z} + \frac{\varphi_2(\zeta)}{z^2} + \frac{\varphi_3(\zeta)}{z^3} + \ldots\right]. \tag{3}$$

Durch Differentiation von (1) nach dem Verzweigungspunkt e_i findet man

$$\frac{\partial s}{\partial e_i} = \pm z^p \left[\frac{\partial a_1}{\partial e_i} + \frac{1}{z}\frac{\partial a_2}{\partial e_i} + \frac{1}{z^2}\frac{\partial a_3}{\partial e_i} + \ldots\right]$$

und da andrerseits auch

$$\frac{\partial s}{\partial e_i} = -\frac{s}{2(z-e_i)} = \mp \frac{1}{2} z^p \left[1 + \frac{\varphi_1(e_i)}{z} + \frac{\varphi_2(e_i)}{z^2} + \ldots\right]$$

ist, so folgt

$$\frac{\partial a_k}{\partial e_i} = -\frac{1}{2}\varphi_{k-1}(e_i). \tag{4}$$

Dies benutzen wir bei der Differentiation von $\varphi_k(z)$ nach e_i und erhalten

$$\frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i} = -\frac{1}{2}\left[z^{k-1} + \varphi_1(e_i) z^{k-2} + \varphi_2(e_i) z^{k-3} + \ldots + \varphi_{k-1}(e_i)\right]. \tag{5}$$

Nun liefert eine einfache Division

$$\frac{\varphi_k(z) - \varphi_k(e_i)}{z - e_i} = z^{k-1} + \varphi_1(e_i) z^{k-2} + \varphi_2(e_i) z^{k-3} + \ldots + \varphi_{k-1}(e_i).$$

also haben wir die Formel

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i} = -\frac{\varphi_k(z) - \varphi_k(e_i)}{2(z - e_i)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{1}{s}\frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i} + \frac{1}{2s(z - e_i)}\varphi_k(z) = \frac{\varphi_k(e_i)}{2s(z - e_i)},$$

und da weiter $\frac{1}{2s(z - e_i)} = \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{1}{s}\right)$, also die linke Seite gleich der Derivierten von $\frac{\varphi_k(z)}{s}$ nach e_i ist:

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\varphi_k(z)}{s}\right) = \frac{\varphi_k(e_i)}{2s(z - e_i)}.$$

Diese Gleichung, die Herr Christoffel in seinen Vorlesungen ohne Beweis mitgeteilt hat, findet sich auch in der ersten Abhandlung von Herrn Wiltheiss,[1] doch erwähnt Herr W. nicht, dass die in seinen Formeln auf der rechten Seite auftretenden Constanten $c_{-2\alpha+1}$ resp. $c_{2\alpha-1}$ gleich den Werten der ganzen Funktionen $H(x)_\alpha$ resp. $G(x)_\alpha$ in dem Verzweigungspunkt a_i sind, nach dem differentiiert wird, was für uns grade von wesentlicher Bedeutung sein wird.

Wir haben mit der Gleichung (7) den wichtigen Satz gefunden:

Der Ausdruck $\frac{1}{\varphi_k(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\varphi_k(z)}{s}\right)$ *hat für alle Funktionen* $\varphi_k(z)$ *den nämlichen Wert, und zwar* $\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2s(z - e_i)}$.

Weitere Eigenschaften der Funktionen φ ergeben sich, wenn wir nach (1) bilden:

$$\frac{ds}{dz} = \pm\left[(p+1)z^p + pa_1 z^{p-1} + (p-1)a_2 z^{p-2} + \ldots + a_p - \frac{a_{p+2}}{z^2} - \frac{2a_{p+3}}{z^3} - \ldots\right].$$

Andererseits ist

$$\frac{ds}{dz} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2p+1}\frac{s}{z - e_i}$$

---

[1] Wiltheiss, Crelles Journal, Bd. 99, S. 246.

und

$$\frac{s}{z - e_i} = \pm z^p \left[1 + \frac{\varphi_1(e_i)}{z} + \frac{\varphi_2(e_i)}{z^2} + \ldots \right];$$

also bestehen die Gleichungen

$$(8) \qquad \sum_{i=0}^{2p+1} \varphi_k(e_i) = 2(p + 1 - k) a_k. \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

Da nun

$$\varphi_k(z) = z\varphi_{k-1}(z) + a_k$$

ist, so erhalten wir, wenn wir hier $z = e_i$ setzen und über sämtliche Verzweigungspunkte summieren, mit Benutzung von (8) weiter:

$$(9) \qquad \sum_{i=0}^{2p+1} e_i \varphi_{k-1}(e_i) = -2k a_k.$$

Diese Gleichungen sind, wie aus (4) zu ersehen ist, nichts anderes, als die Euler'schen Gleichungen für die homogenen Funktionen a_k und zeigen, dass diese in den Verzweigungspunkten von der Dimension k sind.

Sie können auch dazu dienen, um die Coeffizienten $a_1, a_2, \ldots$ in übersichtlicher Weise wirklich darzustellen.

Ist nämlich σ_k die Summe der k^{ten} Potenzen der Wurzeln von $f(z) = 0$, also

$$\sigma_k = \sum_i e_i^k,$$

so ist offenbar nach (9)

$$\sigma_k + a_1\sigma_{k-1} + a_2\sigma_{k-2} + \ldots + a_{k-1}\sigma_1 + 2ka_k = 0. \qquad (k=1,2,\ldots)$$

Aus diesen Gleichungen kann man successive die $a_1, a_2, \ldots$ berechnen und allgemein erhält man:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^k \cdot \underline{|k}} \begin{vmatrix} \sigma_1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 4 & 0 & \ldots & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 6 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & \ldots & 2k-2 \\ \sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \ldots & \sigma_1 \end{vmatrix}.$$

Ich summiere jetzt in (5) über alle Verzweigungspunkte und benutze die Gleichungen (8). Dann kommt:

$$(10)\qquad \sum_i \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i} = -(p+1)a_0 z^{k-1} - pa_1 z^{k-2} - \ldots - (p+2-k)a_{k-1}$$

$$= -\frac{d\varphi_k(z)}{dz} - (p-k+1)\varphi_{k-1}(z).$$

Hier ersetzen wir links $\frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i}$ nach (6) durch $-\frac{\varphi_k(z)-\varphi_k(e_i)}{2(z-e_i)}$ und haben

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i} = -\frac{\varphi_k(z)}{s}\frac{ds}{dz} + \sum_i \frac{\varphi_k(e_i)}{2(z-e_i)},$$

also ergibt sich aus (10), wenn wir noch beide Seiten durch s dividieren und (7) heranziehen:

$$(11)\qquad \sum_i \frac{\varphi_k(e_i)}{2s(z-e_i)} = \sum_i \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\varphi_k(z)}{s}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi_k(z)}{s}\right) - (p-k+1)\frac{\varphi_{k-1}(z)}{s}.$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

§ 3. *Die Hauptintegrale.*

Wir führen jetzt $2p+1$ Integrale ein:

$$(1)\qquad \omega_n(x) = \int^x \frac{\varphi_{p+n}(z)}{s}\,dz \quad \text{für } n = -p, -(p-1), \ldots, -1, 0, +1, \ldots, p,$$

und nennen sie die hyperelliptischen *Hauptintegrale*.

Diese sind in der Fläche T' im Endlichen überall stetig; im Unendlichen zeigen sie ein sehr einfaches Verhalten. Es gilt nämlich der Satz:

In der Entwicklung eines jeden Hauptintegrals im Unendlichen nach Potenzen von z fehlen, bis auf eines, alle variablen Glieder bis zu der Potenz $\frac{1}{z^{p+1}}$.

Beweis. Es ist

$$\text{in } \sum \qquad s = + z^{p+1}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right).$$

also

$$\pm z^{n-1} s = \varphi_{p+n}(z) + \frac{a_{p+n+1}}{z} + \cdots,$$

folglich

$$\frac{\varphi_{p+n}(z)}{s} = \pm z^{n-1} - \frac{1}{zs}(a_{p+n+1} + \cdots).$$

Wir wollen jetzt durch das Symbol Σ_n eine Entwicklung von der Form

$$a + \frac{b}{z^n} + \frac{c}{z^{n+1}} + \cdots$$

andeuten und eine solche kurz als »Σ_n-reihe» bezeichnen. Dann können wir also schreiben:

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \frac{\varphi_{p+n}(z)}{s} = \pm z^{n-1} + \Sigma_{p+2}$$

und durch Integration folgt hieraus, wenn n von null verschieden ist:

(2) $$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \omega_n = \pm \frac{z^n}{n} + \Sigma_{p+1};$$

ist aber $n = 0$, so hat man

(2 a) $$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \omega_0 = \pm \log z + \Sigma_{p+1}.$$

Die beiden letzten Formeln enthalten den oben ausgesprochenen Satz. Sie zeigen aber auch, dass die p Integrale mit negativem Index $\omega_{-p}, \ldots, \omega_{-1}$ auch im Unendlichen stetig, also *Integrale erster Gattung,* die Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ dagegen *Integrale zweiter Gattung* sind, die nur im Unendlichen unstetig werden. Diese Integrale bilden zusammen ein vollständiges System von Integralen erster und zweiter Gattung.

Das Integral ω_0 endlich ist Integral dritter Gattung, wird aber in der weiteren Untersuchung keine Rolle spielen, da die Hauptintegrale stets mit ihrem Index multipliciert auftreten werden.

Auf dem ausgezeichneten Verhalten der Hauptintegrale im Unendlichen beruht die Leichtigkeit, mit der sich jedes Integral der Klasse bei

gegebenen Unstetigkeiten durch Hauptintegrale darstellen lässt. Wir werden hiervon im nächsten Paragraphen Beispiele haben.

Über die Integrationsconstanten der Hauptintegrale verfügen wir in der Weise, dass die Summe der Werte, die die Integrale im Unendlichen auf beiden Blättern haben, null ist. Wir erreichen das, wenn wir den Anfangspunkt der Integration in den freien Verzweigungspunkt e_0 legen.

Die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale bezeichnen wir in folgender Weise: Es bedeute $\int\limits_{\mathfrak{l}} du$ ein Integral über einen geschlossenen Weg $\mathfrak{l}$, wobei die eingeschlossene Fläche beim Integrieren zur Linken bleibt. Dann ist

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\text{an } a_\mu\colon \quad \overset{+}{\omega}_n - \overset{-}{\omega}_n = \int\limits_{b_\mu} d\omega_n = \alpha_{n\mu},\\
&\text{an } b_\mu\colon \quad \overset{+}{\omega}_n - \overset{-}{\omega}_n = -\int\limits_{a_\mu} d\omega_n = \beta_{n\mu}.
\end{aligned}
\qquad \binom{n=-p\ldots+p}{\mu=1,2,\ldots,p}
$$

Zwischen diesen Periodicitätsmoduln bestehen zwei Reihen bilinearer Relationen, die man als Riemann'sche und Weierstrass'sche Relationen bezeichnet. Wir entwickeln in diesem Paragraphen nur die ersteren — die Weierstrass'schen Relationen werden wir in § 5 finden — indem wir das Integral

$$
I_{nl} = \int\limits_{T'} \omega_l d\omega_n, \qquad (n, l = -p \ldots +p)
$$

erstreckt über die Berandung der Fläche T', also über die Querschnitte in bekannter Weise doppelt ausführen. Es sollen dabei die Indices l und n beide von null verschieden sein. Ein erster Wert des Integrals ist

$$
I_{nl} = \sum_{\mu=1}^{p} (\alpha_{l\mu}\beta_{n\mu} - \alpha_{n\mu}\beta_{l\mu}).
$$

Durch Betrachtung der logarithmischen Unstetigkeiten des unbestimmt genommenen Integrals finden wir nun:

Die Summe I_{nl} ist nur dann von Null verschieden, wenn $l = -n$ ist. Dann ist $I_{nl} = \frac{4\pi i}{n}$.

Sei das Symbol $(nl) = 1$ *oder* 0, *je nachdem* $n = l$ *oder nicht*,[1] so kann man diesen Satz durch die Formel ausdrücken

$$(4) \qquad \sum_{\mu}(\alpha_{-l\mu}\beta_{n\mu} - \alpha_{n\mu}\beta_{-l\mu}) = \frac{4\pi i}{n}(nl). \qquad {\scriptstyle (n, l = -p \ldots +p)}$$

Wenden wir jetzt die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf die Hauptintegrale an, so haben wir zunächst den Satz:

Der Ausdruck $\frac{1}{\varphi_{p+n}(e_i)}\frac{\partial\omega_n}{\partial e_i}$ *hat für alle Hauptintegrale den nämlichen Wert und ist gleich dem Integral* $\int \frac{dz}{2s(z-e_i)} = \frac{\partial}{\partial e_i}\int\frac{dz}{s}$.

Wir bezeichnen dieses Integral in der Folge mit $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$, so dass also

$$\omega = \int\frac{dz}{s} = \omega_{-p}$$

ist und haben:

$$(5) \qquad \frac{\partial\omega_n}{\partial e_i} = \varphi_{p+n}(e_i)\frac{\partial\omega}{\partial e_i}. \qquad {\scriptstyle (i = 0, 1, \ldots, 2p+1)}$$

Das Integral $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ habe die Periodicitätsmoduln

$$\text{an } a_\mu: \quad p_{i\mu} = \int_{b_\mu}\frac{dz}{2s(z-e_i)},$$

$$\text{an } b_\mu: \quad q_{i\mu} = -\int_{a_\mu}\frac{dz}{2s(z-e_i)},$$

dann haben wir

$$(6) \qquad \frac{\partial\alpha_{n\mu}}{\partial e_i} = \varphi_{p+n}(e_i)p_{i\mu}, \qquad \frac{\partial\beta_{n\mu}}{\partial e_i} = \varphi_{p+n}(e_i)q_{i\mu}.$$

---

[1] Herr Christoffel gebraucht in gleicher Bedeutung das Symbol $\binom{n}{l}$. (Crelles Journal Bd. 68, p. 254.)

Weiter finden wir aus der letzten Formel in § 2 durch Integrieren, wenn wir noch $p+n+1$ an Stelle von k setzen:

$$(7)\qquad \sum_{i=0}^{2p+1} \varphi_{p+n+1}(e_i)\frac{\partial\omega}{\partial e_i} = \sum_i \frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial e_i} = -\frac{\varphi_{p+n+1}(z)}{s} + n\omega_n, \qquad (n=-p\ldots+p)$$

also auch

$$(8)\qquad \begin{aligned} \sum_i \varphi_{p+n+1}(e_i)p_{i\mu} &= \sum_i \frac{\partial\alpha_{n+1,\mu}}{\partial e_i} = n\alpha_{n\mu}, \\ \sum_i \varphi_{p+n+1}(e_i)q_{i\mu} &= \sum_i \frac{\partial\beta_{n+1,\mu}}{\partial e_i} = n\beta_{n\mu}. \end{aligned}$$

Wir fügen hierzu noch die leicht zu beweisende Formel

$$(7')\qquad \sum_i \frac{\partial\omega}{\partial e_i} = -\frac{1}{s},$$

also

$$(8')\qquad \sum_i p_{i\mu} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_i q_{i\mu} = 0,$$

ersetzen ferner in (7) und (8) $\varphi_{p+n+1}(e_i)$ durch $e_i\varphi_{p+n}(e_i) + a_{p+n+1}$ und erhalten

$$(9)\qquad \sum_i e_i\varphi_{p+n}(e_i)\frac{\partial\omega}{\partial e_i} = \sum_i e_i\frac{\partial\omega_n}{\partial e_i} = -\frac{z\varphi_{p+n}(z)}{s} + n\omega_n$$

und

$$(10)\qquad \begin{aligned} \sum_i e_i\varphi_{p+n}(e_i)p_{i\mu} &= \sum_i e_i\frac{\partial\alpha_{n\mu}}{\partial e_i} = n\alpha_{n\mu}, \\ \sum_i e_i\varphi_{p+n}(e_i)q_{i\mu} &= \sum_i e_i\frac{\partial\beta_{n\mu}}{\partial e_i} = n\beta_{n\mu}. \end{aligned} \qquad \binom{n=-p\ldots+p}{\mu=1,2,\ldots,p}$$

Das sind die Euler'schen Gleichungen für die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale und sie zeigen, dass die $\alpha_{n\mu}$ und $\beta_{n\mu}$ homogene Funktionen der Verzweigungspunkte von der Dimension n sind.

Wir können hier an die Differentialgleichungen anknüpfen, die Herr Wiltheiss[1] für die Periodicitätsmoduln der Integrale 1. und 2. Gattung

[1] Wiltheiss, *Partielle Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunktionen.* Math. Ann. Bd. 31, S. 140 f.

gefunden hat. In den Gleichungen von Herrn WILTHEISS treten nicht, wie bei uns die Differentialquotienten der Periodicitätsmoduln nach den Wurzeln, sondern nach den Coeffizienten der ganzen Funktion $f(z) = s^2$ auf. Wir wollen daher auch diese Coeffizienten in unsere Gleichungen einführen und machen dazu folgenden Ansatz:

Es sei

$$f(z) = z^{2p+2} + c_1 z^{2p+1} + c_2 z^{2p} + \dots + c_{2p+2}.$$

Wir führen die Reihe von Funktionen ein

$$f_k(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + c_2 z^{k-2} + \dots + c_k, \qquad (k=0,1,\dots,2p+2)$$

und gewinnen ganz entsprechend, wie bei der Betrachtung der Funktionen φ in § 2 die Sätze:

$$\frac{\partial c_k}{\partial e_i} = -f_{k-1}(e_i), \qquad \sum_i f_k(e_i) = (2p+2-k)c_k, \qquad \sum_i e_i f_{k-1}(e_i) = -kc_k.$$

Die linken Seiten der Gleichungen (8) werden jetzt bei Einführung der Coeffizienten c:

$$\sum_{i=0}^{2p+1}\sum_{m=1}^{2p+2} \frac{\partial a_{n+1,\mu}}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial e_i} = -\sum_m \sum_i f_{m-1}(e_i)\frac{\partial a_{n+1,\mu}}{\partial c_m}$$

$$= -\sum_m (2p+3-m)c_{m-1}\frac{\partial a_{n+1,\mu}}{\partial c_m};$$

folglich haben wir

$$\text{(8 a)} \qquad \sum_{m=1}^{2p+2}(2p+3-m)c_{m-1}\frac{\partial a_{n+1,\mu}}{\partial c_m} = -n a_{n\mu}.$$

Ebenso formen wir die linken Seiten der Gleichungen (10) um in:

$$\sum_{i=0}^{2p+1}\sum_{m=1}^{2p+2} e_i \frac{\partial a_{n\mu}}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial e_i} = -\sum_m \sum_i e_i f_{m-1}(e_i)\frac{\partial a_{n\mu}}{\partial c_m} = \sum_m m c_m \frac{\partial a_{n\mu}}{\partial c_m}$$

und haben also

$$\text{(10 a)} \qquad \sum_{m=1}^{2p+2} m c_m \frac{\partial a_{n\mu}}{\partial c_m} = n a_{n\mu}.$$

Die Ähnlichkeit dieser Differentialgleichungen (8 a) und (10 a) mit denen des Herrn Wiltheiss ist augenfällig. Die Unterschiede rühren daher, dass Herr Wiltheiss die Klein'sche Form der Integrale 1. und 2. Gattung zu Grunde legt und die Coeffizienten von $f(z)$ in etwas anderer Weise, wie wir, bezeichnet.

Aus $\frac{\partial\omega}{\partial e_i} = \int \frac{dz}{2s(z-e_i)}$ folgt durch Differentiation nach einem *von* e_i *verschiedenen* Verzweigungspunkt e_k:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial e_i \partial e_k} = \int \frac{dz}{4s(z-e_i)(z-e_k)} = \frac{1}{2(e_i-e_k)}\left[\int \frac{dz}{2s(z-e_i)} - \int \frac{dz}{2s(z-e_k)}\right]$$

oder

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial e_i \partial e_k} = \frac{1}{2(e_i-e_k)}\left(\frac{\partial\omega}{\partial e_i} - \frac{\partial\omega}{\partial e_k}\right) \tag{11}$$

und wenn wir zu den Periodicitätsmoduln übergehen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{i\mu}}{\partial e_k} = \frac{\partial p_{k\mu}}{\partial e_i} = \frac{p_{i\mu}-p_{k\mu}}{2(e_i-e_k)}, \\ \frac{\partial q_{i\mu}}{\partial e_k} = \frac{\partial q_{k\mu}}{\partial e_i} = \frac{q_{i\mu}-q_{k\mu}}{2(e_i-e_k)}. \end{aligned} \qquad \begin{matrix} (i, k = 0, 1, \ldots, 2p+1) \\ (\mu = 1, 2, \ldots, p) \end{matrix} \quad (i \lessgtr k) \tag{12}$$

Für die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale setzen sich diese Gleichungen um in partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, in denen immer nur zwei Verzweigungspunkte vorkommen. Wir erhalten nach (6), wenn wir noch aus § 2 Gleichung (6) zuziehen, diese Differentialgleichungen in der Form:

$$2(e_i-e_k)\varphi_{p+n}(e_i)\varphi_{p+n}(e_k)\frac{\partial^2 a_{n\mu}}{\partial e_i \partial e_k} = \varphi_{p+n}(e_k)^2\frac{\partial a_{n\mu}}{\partial e_i} - \varphi_{p+n}(e_i)^2\frac{\partial a_{n\mu}}{\partial e_k}.$$

§ 4. *Die Integrale* $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ *und das Integral dritter Gattung.*

Wir haben gesehen, dass sich die Derivierten der Hauptintegrale nach den Verzweigungspunkten in einfachster Weise durch die Derivierten

$\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ des einen Integrals $\omega = \int \frac{dz}{s}$ ausdrücken, welche selbst wieder Integrale der Klasse sind, indem

$$\frac{\partial\omega}{\partial e_i} = \int \frac{dz}{2s(z - e_i)}.$$

Da diese Integrale nur algebraisch unstetig werden, müssen sie sich linear durch die Hauptintegrale 1. und 2. Gattung darstellen lassen. Wir können diese Darstellung finden, wenn wir die Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen in Verbindung mit (7′) nach den $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ auflösen, doch müssten wir zur Ermittlung der dabei auftretenden Determinanten noch einige Eigenschaften der Funktionen φ entwickeln. Wir ziehen es daher vor, die Darstellung direkt aus der Betrachtung der Unstetigkeiten der Integrale $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ herzuleiten mit Hülfe eines Verfahrens, das in ähnlicher Weise bei jedem Integral der Klasse angewandt werden kann.

Das Integral $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ wird nur im Verzweigungspunkt e_i unstetig, und zwar wie $-\frac{1}{s}$, sodass

$$\text{in } e_i: \qquad \frac{\partial\omega}{\partial e_i} = -\frac{1}{\sqrt{f'(e_i)}\sqrt{z - e_i}} + \text{fct. cont.}$$

Die gleiche Unstetigkeit und sonst keine im Endlichen zeigt die Funktion der Klasse:

$$-\frac{s}{f'(e_i)(z - e_i)},$$

also ist

$$V = \frac{\partial\omega}{\partial e_i} + \frac{s}{f'(e_i)(z - e_i)}$$

ein Integral der Klasse, das im Endlichen überall stetig ist.

Wir entwickeln V im Unendlichen nach Potenzen von z bis zur Potenz $\frac{1}{z^{p+1}}$, also bis auf eine Σ_{p+1}-reihe.

Wie man sieht, wird $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ im Unendlichen 0^{p+1} (von einer Constanten

können wir absehen, da wir sie zu der Σ_{p+1}-reihe nehmen können), also liefert $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ keinen Beitrag zu der beabsichtigten Entwicklung von V. Wir haben daher

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \quad V = \frac{s}{f'(e_i)(z-e_i)} + \Sigma_{p+1}$$

$$= \pm\frac{1}{f'(e_i)}\left[z^p + \varphi_1(e_i)z^{p-1} + \varphi_2(e_i)z^{p-2} + \dots + \frac{\varphi_{2p}(e_i)}{z^p}\right] + \Sigma_{p+1}.$$

Nun haben wir aber im vorigen Paragraphen gesehen, dass

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \pm z^n = n\omega_n + \Sigma_{p+1}$$

ist, also ist auch

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad V = \frac{1}{f'(e_i)}\sum_{n=-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(e_i)\,\omega_n(x) + \Sigma_{p+1}.$$

Die Differenz

$$\Delta = V - \frac{1}{f'(e_i)}\sum_{-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(e_i)\,\omega_n(x)$$

ist überall stetig, also entweder Integral 1. Gattung oder constant. Nun ist aber Δ im Unendlichen eine Σ_{p+1}-reihe, andererseits ist, infolge der Formeln (2) des vorigen Paragraphen, *kein Integral der Klasse im Unendlichen eine reine Σ_{p+1}-reihe,* folglich muss Δ constant sein. Ich nehme es als Integrationsconstante zu V und habe

$$(1) \qquad \frac{\partial\omega}{\partial e_i} = -\frac{s}{f'(e_i)(z-e_i)} + \frac{1}{f'(e_i)}\sum_{-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(e_i)\,\omega_n(x). \qquad (i=0,1,\dots,2p+1)$$

Die Periodicitätsmoduln von $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ ergeben sich daraus in der Form:

$$(2) \qquad \begin{aligned} p_{i\mu} &= \frac{1}{f'(e_i)}\sum_{-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(e_i)\,\alpha_{n\mu},\\ q_{i\mu} &= \frac{1}{f'(e_i)}\sum_{-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(e_i)\,\beta_{n\mu}.\end{aligned} \qquad \binom{i=0,1,\dots,2p+1}{\mu=1,2,\dots,p}$$

Fügen wir zu den Hauptintegralen noch das Integral [1]

$$r(x, \xi) = \int \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \frac{dz}{2s}, \tag{3}$$

so haben wir alle Integrale, die zur Darstellung eines beliebigen Integrals der Klasse nötig sind.

Das Integral $r(x, \xi)$ besitzt als Funktion von z nur logarithmische Unstetigkeiten, hat also den Charakter eines Integrals 3. Gattung, und zwar ist

$$\text{in } \xi: \qquad r = \log(z-\zeta) + \text{ fct. cont.}$$

$$\text{in } \infty_1, \infty_2: \qquad r = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{z}\right) + \text{ fct. cont.}$$

Die Periodicitätsmoduln von r an den Querschnitten seien:

$$\begin{aligned} &\text{an } a_\mu: \quad A_\mu(\xi) = \int_{b_\mu} \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{dz}{2s}, \\ &\text{an } b_\mu: \quad B_\mu(\xi) = -\int_{a_\mu} \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{dz}{2s}. \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p) \tag{4}$$

Ausserdem besitzt r constante (d. h. von ξ unabhängige) Periodicitätsmoduln an Schnitten, die von einem beliebigen Punkt nach den logarithmischen Unstetigkeiten führen.

Die Derivierten des Integrals $r(x, \xi)$ nach den Verzweigungspunkten drücken sich in sehr einfacher Weise durch die Integrale $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ aus. Man findet nämlich leicht, wenn man in (3) unter dem Integralzeichen differentiiert:

$$\frac{\partial r(x, \xi)}{\partial e_i} = -\frac{\sigma}{2(\zeta - e_i)} \frac{\partial \omega(x)}{\partial e_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p+1) \tag{5}$$

---

[1] Dies Integral ist ein bekannter Spezialfall der von Herrn CHRISTOFFEL in die Lehre von den Abel'schen Integralen eingeführten Funktion R. (Annali di Mat., t. 10, p. 97.) Es ist identisch mit dem Integral $\int H(x'y', xy)dx$ von Herrn WEIERSTRASS.

und daraus weiter durch Übergang zu den Periodicitätsmoduln:

$$(6)\qquad \frac{\partial A_\mu(\xi)}{\partial e_i} = -\frac{\sigma}{2(\zeta - e_i)}p_{i\mu}, \qquad \frac{\partial B_\mu(\xi)}{\partial e_i} = -\frac{\sigma}{2(\zeta - e_i)}q_{i\mu}.$$

Die Derivierte des Integrals $r(x, \xi)$ nach dem Parameter ζ liefert das Integral 2. Gattung, das nur in einem Punkt im Endlichen zur ersten Ordnung unendlich wird, nämlich:

$$(7)\qquad \begin{aligned} t(x, \xi) &= -\frac{\partial r(x, \xi)}{\partial \zeta} \\ &= -\int^{x} \frac{s + \sigma + (z - \zeta)\sigma'}{2s(z - \zeta)^2}\, dz, \qquad \left(\sigma' = \frac{d\sigma}{d\zeta}\right). \end{aligned}$$

Wir wollen es durch die Hauptintegrale darstellen.

$t(x, \xi)$ wird als Funktion von z nur in ξ unstetig, und zwar wie $\frac{1}{z - \zeta}$. Die gleiche Unstetigkeit und keine andere im Endlichen zeigt die Funktion der Klasse:

$$\frac{s + \sigma}{z - \zeta}\,\frac{1}{2\sigma},$$

also ist die Differenz

$$V = t(x, \xi) - \frac{s + \sigma}{z - \zeta}\,\frac{1}{2\sigma}$$

Integral der Klasse und im Endlichen stetig.

Entwickeln wir wieder V im Unendlichen nach Potenzen von z bis auf eine Σ_{p+1}-reihe, so ist zunächst

$$t(x, \xi) = -\frac{1}{2}\int^{x}\left[\frac{1}{(z - \zeta)^2} + \frac{\sigma}{s(z - \zeta)^2} + \frac{\sigma'}{s(z - \zeta)}\right]dz.$$

Das zweite und dritte Glied unter dem Integralzeichen liefern zu $t(x, \xi)$ Beiträge, die im Unendlichen zu höherer, als der p^{ten} Ordnung null werden, also können wir ansetzen:

$$\text{im } \Sigma_\infty\colon\quad \begin{aligned} t(x, \xi) &= -\int^{x} \frac{dz}{2(z - \zeta)^2} + \Sigma_{p+1} \\ &= \frac{1}{2(z - \zeta)} + \Sigma_{p+1}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{1}{2\sigma}=\frac{1}{2(z-\zeta)}+\frac{s}{2\sigma(z-\zeta)},$$

also

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad V=-\frac{s}{2\sigma(z-\zeta)}+\Sigma_{p+1}$$

$$=\mp\frac{1}{2\sigma}\left[z^p+\varphi_1(\zeta)z^{p-1}+\varphi_2(\zeta)z^{p-2}+\dots+\frac{\varphi_{2p}(\zeta)}{z^p}\right]+\Sigma_{p+1}.$$

Wir finden jetzt genau, wie oben bei den Integralen $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$:

$$(8) \qquad t(x\,,\,\xi)=\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{1}{2\sigma}-\frac{1}{2\sigma}\sum_{-p}^{+p}n\varphi_{p-n}(\zeta)\,\omega_n(x).$$

Aus dieser Formel erhalte ich durch Differentiation nach z:

$$(9) \quad \frac{d}{d\zeta}\frac{s+\sigma}{(z-\zeta)2s}+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{p}\nu\frac{\varphi_{p+\nu}(\zeta)}{\sigma}\frac{\varphi_{p-\nu}(z)}{s}=\frac{d}{dz}\frac{s+\sigma}{(\zeta-z)2\sigma}+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{p}\nu\frac{\varphi_{p+\nu}(z)}{s}\frac{\varphi_{p-\nu}(\zeta)}{\sigma}$$

oder nach leichter Rechnung

$$\sum_{-p}^{+p}n\varphi_{p-n}(\zeta)\varphi_{p+n}(z)=\frac{f'(z)+f'(\zeta)}{2(z-\zeta)}-\frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}.$$

Wie man sieht, entspricht die Gleichung (9) der in der Einleitung erwähnten Weierstrass'schen Hauptgleichung (1) und sie zeigt, dass die Hauptintegrale, bis auf constante Faktoren, ein System zusammengehöriger Fundamentalintegrale im Sinn von Herrn Weierstrass bilden. Natürlich kann man verlangen, diese Gleichung auch ohne Benutzung der Integrale lediglich mit Hülfe der Funktionen φ abzuleiten und dies gelingt auch in der That ohne grosse Mühe. Man kann dann umgekehrt von hier aus zu den Integralen $t(x\,,\,\xi)$ und $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ gelangen, wobei man mit Vorteil von den Gleichungen

$$\frac{\partial\omega}{\partial e_i}=-\frac{2}{f'(e_i)}\lim_{\zeta=e_i}\sigma t(x\,,\,\xi),$$

$$t(x\,,\,\xi)=\quad\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{1}{2s}-\sum_i\frac{\sigma}{2(\zeta-e_i)}\frac{\partial\omega(x)}{\partial e_i}$$

Gebrauch machen kann.

Multipliciere ich Gleichung (8) mit $-d\zeta$ und integriere, so kommt:

$$(10)\qquad r(x\,;\,\xi) = r(\xi\,,\,x) + \frac{1}{2}\sum_{-p}^{+p} n\omega_{-n}(\xi)\,\omega_n(x).$$

Bilde ich also die Funktion

$$(11)\qquad H(x\,,\,\xi) = r(x\,,\,\xi) + \frac{1}{2}\sum_{1}^{p} \nu\omega_{\nu}(\xi)\,\omega_{-\nu}(x),$$

so ist

$$(12)\qquad H(x\,,\,\xi) = H(\xi\,,\,x).$$

Diese Funktion H unterscheidet sich, als Funktion von z, von $r(x\,,\,\xi)$ nur durch ein Integral 1. Gattung, hat also genau dieselben Unstetigkeiten, wie $r(x\,,\,\xi)$. Wir können sie, nach einer von Herrn KLEIN eingeführten Terminologie, als das *algebraisch normierte Integral* 3. *Gattung* bezeichnen.

Man kann, nach dem Vorgang von Herrn KLEIN, dieses Normalintegral in Form eines Doppelintegrals schreiben, wodurch die Eigenschaft (12) der Vertauschbarkeit von Parameter und Argument in Evidenz tritt. Es wird nämlich

$$(13)\qquad H(x\,,\,\xi) = \iint \frac{s\sigma + F(z\,,\,\zeta)}{2(z-\zeta)^2 s\sigma}\,dz\,d\zeta,$$

und darin ist nach (9):

$$(14)\qquad F(z\,,\,\zeta) = f(z) - \frac{1}{2}f'(z)(z-\zeta) + (z-\zeta)^2 \sum_{\nu=1}^{p} \nu\varphi_{p+\nu}(z)\varphi_{p-\nu}(\zeta).$$

Diese Funktion $F(z\,,\,\zeta)$ muss, wie schon in der Einleitung erwähnt und durch Gleichung (9) bestätigt wird, in z und ζ symmetrisch sein. Durch eine eingehendere Untersuchung der Formel (14), die wir hier übergehen können, kann man diese Symmetrie auch äusserlich zum Ausdruck bringen, nämlich durch die Gleichung:

$$(14\text{a})\qquad F(z\,,\,\zeta) = \frac{f(z) - \varphi_{p+1}(z)^2}{2} + \frac{f(\zeta) - \varphi_{p+1}(\zeta)^2}{2}$$

$$+ \varphi_{p+1}(z)\varphi_{p+1}(\zeta) + (z-\zeta)[\chi(z) - \chi(\zeta)],$$

worin

$$\chi(z) = a_{p+2}\varphi_{p-1}(z) + 2a_{p+3}\varphi_{p-2}(z) + 3a_{p+4}\varphi_{p-3}(z) + \cdots + pa_{2p+1}.$$

Wie man sieht, ist der von dem letzten Glied in (14a) herrührende Teil von $\Pi(x, \xi)$ als Funktion von z wie auch von ζ Integral 1. Gattung. Lasse ich ihn daher fort, so ist auch das mit Hülfe der Funktion

$$\Phi(z, \zeta) = \frac{f(z) - \varphi_{p+1}(z)^2}{2} + \frac{f(\zeta) - \varphi_{p+1}(\zeta)^2}{2} + \varphi_{p+1}(z)\varphi_{p+1}(\zeta)$$

gebildete Integral

$$\iint \frac{s\sigma + \Phi(z, \zeta)}{2(z-\zeta)^2 s\sigma} dz d\zeta$$

ein algebraisch normiertes Integral 3. Gattung.

§ 5. *Die Periodicitätsmoduln von* $r(x, \xi)$.

Die Formel (10) im letzten Paragraphen liefert auch eine Darstellung der Periodicitätsmoduln $A_\mu(\xi)$ und $B_\mu(\xi)$ von $r(x, \xi)$ durch die Hauptintegrale. Es besitzt nämlich das dort rechts stehende Integral $r(\xi, x)$ als Funktion von z keine Periodicitätsmoduln an den Querschnitten, sodass wir erhalten

$$(1) \qquad \begin{aligned} A_\mu(\xi) &= \frac{1}{2}\sum_{-p}^{+p} n\alpha_{n\mu}\omega_{-n}(\xi), \\ B_\mu(\xi) &= \frac{1}{2}\sum_{-p}^{+p} n\beta_{n\mu}\omega_{-n}(\xi). \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

Wir entnehmen daraus zunächst den Satz:

Die Periodicitätsmoduln der Funktion $r(x, \xi)$, also die Querschnittintegrale (4) *im vorigen Paragraphen, sind als Funktionen des Parameters ζ Integrale der Klasse, die nur im Unendlichen und zwar zur Ordnung p unstetig werden.*

Diese Integrale A_μ und B_μ zeichnen sich durch besonders einfache

Eigenschaften hinsichtlich ihrer Periodicitätsmoduln aus, die wir jetzt ableiten wollen.[1]

Wir multiplicieren von den Gleichungen (1) die erste mit $\beta_{l\mu}$, die zweite mit $\alpha_{l\mu}$, subtrahieren die erste von der zweiten und summieren über alle μ von 1 bis p. Dann erhalten wir

$$\sum_{\mu}(\alpha_{l\mu}B_{\mu}(\xi)-\beta_{l\mu}A_{\mu}(\xi))=\frac{1}{2}\sum_{n=-p}^{+p}n\omega_{-n}(\xi)\sum_{\mu}(\alpha_{l\mu}\beta_{n\mu}-\alpha_{n\mu}\beta_{l\mu}).$$

Nun haben wir in § 3 gesehen, dass die Summe nach μ auf der rechten Seite nur für $n=-l$ von null verschieden ist, und dass ihr Wert in diesem Falle gleich $-\frac{4\pi i}{l}$ ist, also haben wir

$$(2)\qquad \sum_{\mu}(\alpha_{l\mu}B_{\mu}(\xi)-\beta_{l\mu}A_{\mu}(\xi))=2\pi i\omega_{l}(\xi),\qquad {\scriptstyle (l=-p\ldots+p)\atop (l\neq 0)}$$

als Darstellung der Hauptintegrale durch die Integrale A_{μ} und B_{μ}.

Andererseits können wir die Hauptintegrale durch Auflösung der $2p$ Gleichungen (1) finden. Wir führen zu diesem Ende die aus sämtlichen Periodicitätsmoduln sämtlicher Hauptintegrale gebildete Determinante $2p^{\text{ten}}$ Grades ein:

$$(3)\qquad D=\begin{vmatrix} \alpha_{-p1} & \alpha_{-p2} & \cdots & \alpha_{-pp} & \beta_{-p1} & \beta_{-p2} & \cdots & \beta_{-pp} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{-11} & \alpha_{-12} & \cdots & \alpha_{-1p} & \beta_{-11} & \beta_{-12} & \cdots & \beta_{-1p} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pp} & \beta_{p1} & \beta_{p2} & \cdots & \beta_{pp} \end{vmatrix}.$$

Ihre ersten Unterdeterminanten sind

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_{n\mu}},\ \frac{\partial D}{\partial \beta_{n\mu}}\qquad {\scriptstyle (n=-p\ldots+p)\atop (\mu=1,2,\ldots,p)}$$

---

[1] Eine Herleitung dieser Eigenschaften auf ganz anderem Wege findet sich schon in der Dissertation von PAULS, *Über die Beziehung des Riemann'schen Integrals 2. Gattung zu den Periodicitätsmoduln der Funktion* $R(O\mid\varepsilon)$. Strassburg 1882. Die Funktionen $\mathfrak{A}_{\mu}(O)$ und $\mathfrak{B}_{\mu}(O)$ von Herrn PAULS sind identisch mit unseren $-A_{\mu}(x)$, $-B_{\mu}(x)$.

also gibt die Auflösung der Gleichungen (1) nach den Hauptintegralen:

$$n\omega_{-n}(\xi) = 2\sum_{\mu}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{n\mu}}A_{\mu}(\xi) + \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \beta_{n\mu}}B_{\mu}(\xi)\right);$$

vergleichen wir dies mit (2), indem wir dort $l = -n$ setzen, so erhalten wir

$$(4)\qquad \frac{\partial D}{\partial \alpha_{n\mu}} = -\frac{n}{4\pi i}D\beta_{-n\mu}, \qquad \frac{\partial D}{\partial \beta_{n\mu}} = \frac{n}{4\pi i}D\alpha_{-n\mu}.$$

Nun bestehen nach einem Fundamentalsatz der Lehre von den Determinanten die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\sum_n \alpha_{n\mu}\frac{\partial D}{\partial \beta_{n\nu}} = 0,\\ &\sum_n \beta_{n\mu}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{n\nu}} = 0,\\ &\sum_n \alpha_{n\mu}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{n\nu}} = (\mu\nu)D,\\ &\sum_n \beta_{n\mu}\frac{\partial D}{\partial \beta_{n\nu}} = (\mu\nu)D, \end{aligned} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

worin $(\mu\nu)$ das schon in § 3 gebrauchte Symbol bedeutet. In diese Gleichungen setzen wir die in (4) gefundenen Werte der Unterdeterminanten von D ein und erhalten

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\sum_n n\alpha_{n\mu}\alpha_{-n\nu} = 0,\\ &\sum_n n\beta_{n\mu}\beta_{-n\nu} = 0,\\ &\sum_n n\alpha_{n\mu}\beta_{-n\nu} = -4\pi i(\mu\nu). \end{aligned} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Die vierte Gleichung liefert dasselbe, wie die dritte.

Dies ist die, schon in § 3 erwähnte, zweite Reihe bilinearer Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale. Man nennt sie die *Weierstrass'schen Relationen.*

Nun sehen wir aber aus (1) sofort, dass wir in den linken Seiten der Weierstrass'schen Relationen die doppelten Periodicitätsmoduln der

Integrale $A_\mu(\xi)$ und $B_\mu(\xi)$ vor uns haben. Wir ersehen daraus, dass diese Integrale das einfachste überhaupt mögliche Verhalten an den Querschnitten zeigen, indem *jedes nur einen einzigen von null verschiedenen Periodicitätsmodul* und zwar an dem Querschnitt besitzt, der in der Darstellung durch Querschnittintegrale (§ 4 (4)) als Integrationsweg dient. Wir bringen dies Verhalten übersichtlich in folgender Tabelle zum Ausdruck:

	a_1	a_2	$\dots$	a_p	b_1	b_2	$\dots$	b_p
A_1	0	0	$\dots$	0	$-2\pi i$	0	$\dots$	0
A_2	0	0	$\dots$	0	0	$-2\pi i$	$\dots$	0
.	.	.	$\dots$	.	.	.	$\dots$	.
A_p	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	$-2\pi i$
B_1	$2\pi i$	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
B_2	0	$2\pi i$	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
.	.	.	$\dots$	.	.	.	$\dots$	.
B_p	0	0	$\dots$	$2\pi i$	0	0	$\dots$	0

Die Gleichungen (4) für die Unterdeterminanten von D setzen uns in Stand, die Determinante D selber zu bestimmen.[1]

Bilden wir nämlich aus einer Reihe Unterdeterminanten die Determinante p^{ten} Grades:

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial \beta_{11}} & \frac{\partial D}{\partial \beta_{12}} & \dots & \frac{\partial D}{\partial \beta_{1p}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial D}{\partial \beta_{p1}} & \frac{\partial D}{\partial \beta_{p2}} & \dots & \frac{\partial D}{\partial \beta_{pp}} \end{vmatrix},$$

so haben wir erstens nach (4):

$$D' = \frac{1^p}{(4\pi i)^p} D^p \Delta .$$

[1] Vgl. hierzu die ganz analoge Untersuchung bei Krazer und Prym, *Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen.* S. 63 f.

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{-11} & \alpha_{-12} & \ldots & \alpha_{-1p} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_{-p1} & \alpha_{-p2} & \ldots & \alpha_{-pp} \end{vmatrix}$$

ist, eine Determinante, die uns im nächsten Paragraphen wieder begegnen wird. Ihr Wert ist bekanntlich stets von null verschieden.

Einen zweiten Wert von D' finden wir, wenn wir in bekannter Weise diese Determinante zu einer Determinante $2p^{\text{ten}}$ Grades erweitern, sodass wir erhalten:

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial D}{\partial \alpha_{11}} & \ldots & \frac{\partial D}{\partial \alpha_{1p}} & \frac{\partial D}{\partial \beta_{11}} & \ldots & \frac{\partial D}{\partial \beta_{1p}} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial D}{\partial \alpha_{p1}} & \ldots & \frac{\partial D}{\partial \alpha_{pp}} & \frac{\partial D}{\partial \beta_{p1}} & \ldots & \frac{\partial D}{\partial \beta_{pp}} \end{vmatrix}.$$

Multiplicieren wir diese Determinante mit der Determinante D, so erhalten wir mit Benutzung der Gleichungen (5):

$$DD' = \begin{vmatrix} \alpha_{-p1} & \ldots & \alpha_{-pp} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_{-11} & \ldots & \alpha_{-1p} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1p} & D & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_{p1} & \ldots & \alpha_{pp} & 0 & \ldots & D \end{vmatrix}$$

$$= D^p \begin{vmatrix} \alpha_{-p1} & \ldots & \alpha_{-pp} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_{-11} & \ldots & \alpha_{-1p} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} D^p \Delta.$$

Vergleichen wir dies mit dem eben erhaltenen Wert von D', so folgt

$$(7) \qquad D = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{(4\pi i)^p}{\underline{|p}}.$$

Als wichtigstes Ergebnis folgt hieraus, dass die Determinante D von den Verzweigungspunkten unabhängig ist. Für $p = 1$ haben wir die Legendre'sche Relation.

Die entsprechende Determinante für die Periodicitätsmoduln anderer Fundamentalintegrale ist öfters Gegenstand der Untersuchung gewesen,[1] zuletzt von Herrn VAHLEN in Crelles Journal, Bd. 114, S. 47, doch scheint die hier gegebene Ableitung neu zu sein.

Wir wollen schliesslich für die Integrale $A_\mu(x)$ und $B_\mu(x)$ einen Satz ableiten, an den sich eine allgemeinere Betrachtung anschliessen wird, die uns im folgenden Paragraphen von Nutzen sein wird.

Aus den Darstellungen (1) von A_μ und B_μ sehen wir, dass wir diese Integrale in der Form ansetzen können:

$$(8) \qquad A_\mu(x) = \int^x \frac{P_\mu(z)}{s}\,dz, \qquad B_\mu(x) = \int^x \frac{Q_\mu(z)}{s}\,dz,$$

worin die $P_\mu(z)$, $Q_\mu(z)$ ganze Funktionen von z vom Grade $2p$ sind. Aus denselben Formeln in Verbindung mit den Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen folgt:

$$P_\mu(e_i) = \lim_{z=e_i} s\frac{dA_\mu(x)}{dz} = \frac{1}{2}f'(e_i)p_{i\mu},$$

$$Q_\mu(e_i) = \lim_{z=e_i} s\frac{dB_\mu(x)}{dz} = \frac{1}{2}f'(e_i)q_{i\mu}.$$

Nun haben wir aber nach (6) im vorigen Paragraphen:

$$p_{i\mu} = -\frac{2(z-e_i)}{s}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial e_i}, \qquad q_{i\mu} = -\frac{2(z-e_i)}{s}\frac{\partial B_\mu(x)}{\partial e_i},$$

also ist

$$\frac{1}{P_\mu(e_i)}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial e_i} = \frac{1}{Q_\mu(e_i)}\frac{\partial B_\mu(x)}{\partial e_i} = -\frac{s}{f'(e_i)(z-e_i)}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots$$

[1] Vgl. FUCHS, Crelles Journ. Bd. 71, S. 128 ff. KÖNIGSBERGER, *Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale*, S. 70—78. WINCKLER, Wiener Sitzungsber. Bd. 62, S. 115.

und wenn wir nach z differentiieren:

$$(9) \qquad \frac{1}{P_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{P_\mu(z)}{s}\right) = \frac{1}{Q_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{Q_\mu(z)}{s}\right) = -\frac{1}{f'(e_i)}\frac{d}{dz}\frac{s}{z-e_i}. \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

Wir erkennen also, dass für die $2p$ ganzen Funktionen $P_\mu(z)$ und $Q_\mu(z)$ derselbe Satz gilt, wie für die Funktionen $\varphi_k(z)$, *dass nämlich die Ausdrücke* $\frac{1}{P_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{P_\mu(z)}{s}\right)$ *und* $\frac{1}{Q_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{Q_\mu(z)}{s}\right)$ *für alle Funktionen* P_μ *und* Q_μ *denselben Wert haben.*

Wir wollen jetzt, wenn $\psi(z)$ irgend eine ganze Funktion von z ist, die auch von den Verzweigungspunkten abhängt, den Ausdruck $\frac{1}{\psi(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\psi(z)}{s}\right)$ durch das Symbol

$$(10) \qquad \Delta_i(\psi) = \frac{1}{\psi(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\psi(z)}{s}\right)$$

bezeichnen und fragen, welche Bedingungen eine Schar von ganzen Funktionen $\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_n(z)$ erfüllen muss, damit

$$\Delta_i(\psi_0) = \Delta_i(\psi_1) = \ldots = \Delta_i(\psi_n) = \tau_i$$

ist.

Wir können jede ganze Funktion linear aus den Funktionen $\varphi_k(z)$ zusammensetzen, sodass wir ansetzen können:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= a_{00}\varphi_0 + a_{01}\varphi_1 + \ldots + a_{0k}\varphi_k,\\
\psi_1 &= a_{10}\varphi_0 + a_{11}\varphi_1 + \ldots + a_{1k}\varphi_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\psi_n &= a_{n0}\varphi_0 + a_{n1}\varphi_1 + \ldots + a_{nk}\varphi_k,
\end{aligned}$$

wenn k der höchste unter den Funktionen ψ vorkommende Grad ist.

Bilden wir jetzt das Symbol Δ_i, so ist

$$\Delta_i(\varphi_0) = \Delta_i(\varphi_1) = \ldots = \Delta_i(\varphi_k) = \frac{1}{2s(z-e_i)} = \theta_i,$$

also

$$\begin{aligned}
\Delta_i(\psi_0) &= \theta_i + \frac{1}{\psi_0(e_i)}\left[\frac{\partial a_{00}}{\partial e_i}\frac{\varphi_0}{s} + \frac{\partial a_{01}}{\partial e_i}\frac{\varphi_1}{s} + \ldots + \frac{\partial a_{0k}}{\partial e_i}\frac{\varphi_k}{s}\right].\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_i(\psi_n) &= \theta_i + \frac{1}{\psi_n(e_i)}\left[\frac{\partial a_{n0}}{\partial e_i}\frac{\varphi_0}{s} + \frac{\partial a_{n1}}{\partial e_i}\frac{\varphi_1}{s} + \ldots + \frac{\partial a_{nk}}{\partial e_i}\frac{\varphi_k}{s}\right].
\end{aligned}$$

Soll nun für jedes z

$$\Delta_i(\psi_0) = \Delta_i(\psi_1) = \ldots = \Delta_i(\psi_n) = \tau_i$$

sein, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(11)\qquad \begin{aligned}
\frac{1}{\psi_0(e_i)}\frac{\partial a_{00}}{\partial e_i} &= \frac{1}{\psi_1(e_i)}\frac{\partial a_{10}}{\partial e_i} = \ldots = \frac{1}{\psi_n(e_i)}\frac{\partial a_{n0}}{\partial e_i} = c_0^{(i)},\\
\frac{1}{\psi_0(e_i)}\frac{\partial a_{01}}{\partial e_i} &= \frac{1}{\psi_1(e_i)}\frac{\partial a_{11}}{\partial e_i} = \ldots = \frac{1}{\psi_n(e_i)}\frac{\partial a_{n1}}{\partial e_i} = c_1^{(i)}, \qquad (i=0,1,\ldots,2p+1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{\psi_0(e_i)}\frac{\partial a_{0k}}{\partial e_i} &= \frac{1}{\psi_1(e_i)}\frac{\partial a_{1k}}{\partial e_i} = \ldots = \frac{1}{\psi_n(e_i)}\frac{\partial a_{nk}}{\partial e_i} = c_k^{(i)},
\end{aligned}$$

und es ist

$$(12)\qquad \tau_i = \theta_i + c_0^{(i)}\frac{\varphi_0}{s} + c_1^{(i)}\frac{\varphi_1}{s} + \ldots + c_k^{(i)}\frac{\varphi_k}{s}.$$

Wir können dies in dem Satz zusammenfassen:

Damit für ein System von ganzen Funktionen $\psi_0, \ldots, \psi_n$, *die sich in der angegebenen Weise durch die* φ *ausdrücken,* $\Delta_i(\psi_0) = \Delta_i(\psi_1) = \ldots = \Delta_i(\psi_n)$ *ist, ist notwendig und hinreichend, dass*

$$\frac{1}{\psi_\mu(e_i)}\frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial e_i} = c_\lambda^{(i)}$$

vom Index μ *unabhängig ist.*

Diese Schlüsse bleiben unverändert, wenn wir statt der Darstellung der ψ durch die Funktionen φ eine solche durch irgend eine andere Funktionenreihe χ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ ansetzen, für die $\Delta_i(\chi_k)$ bei jedem Wert des Index k denselben Wert hat. Wir haben somit den allgemeineren Satz:

Sind $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ und $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$ zwei Reihen ganzer Funktionen von z, für die

$$\Delta_i(\psi_1) = \Delta_i(\psi_2) = \Delta_i(\psi_3) = \ldots = \tau_i,$$

$$\Delta_i(\chi_1) = \Delta_i(\chi_2) = \Delta_i(\chi_3) = \ldots = \theta_i,$$

und lassen sich die Funktionen der einen Reihe linear durch die der andern darstellen, so dass

$$\chi_\mu = \sum_\lambda c_{\mu\lambda} \psi_\lambda,$$

so ist

$$c_\lambda^{(i)} = \frac{1}{\chi_\mu(e_i)} \frac{\partial c_{\mu\lambda}}{\partial e_i}$$

vom Index μ unabhängig und

$$\theta_i = \tau_i + \sum_\lambda c_\lambda^{(i)} \frac{\psi_\lambda}{s}.$$

Liegt im Besonderen, wie dies im nächsten Paragraphen der Fall sein wird, eine Darstellung der ψ durch die Funktionen $P_\mu(z)$ und $Q_\mu(z)$ vor, so dass

$$\psi_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{p} A_{\mu\lambda} P_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{p} B_{\mu\lambda} Q_\lambda,$$

so müssen

$$c_\lambda^{(i)} = \frac{1}{\psi_\mu(e_i)} \frac{\partial A_{\mu\lambda}}{\partial e_i} \quad \text{und} \quad d_\lambda^{(i)} = \frac{1}{\psi_\mu(e_i)} \frac{\partial B_{\mu\lambda}}{\partial e_i}$$

vom Index μ unabhängig sein und es ist

$$(13) \qquad \Delta_i(\psi_\mu) = \tau_i = \theta_i + \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda^{(i)} \frac{P_\lambda}{s} + \sum_{\lambda=1}^{p} d_\lambda^{(i)} \frac{Q_\lambda}{s},$$

wo aber jetzt

$$\theta_i = -\frac{1}{f'(e_i)} \frac{d}{dz} \frac{s}{z - e_i}$$

zu setzen ist.

ZWEITER TEIL.

Die Normalintegrale erster und zweiter Gattung und ihre Derivierten nach den Verzweigungspunkten.

§ 6. *Die Normalintegrale erster Gattung.*

Das Normalintegral erster Gattung $u_\mu(x)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ wird bekanntlich definiert durch die Bedingung, am Querschnitt a_μ den Periodicitätsmodul πi zu haben, an allen übrigen Querschnitten erster Art aber stetig zu sein. Bezeichnet wieder Δ die Determinante der Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale erster Gattung an den Querschnitten erster Art, also

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{-11} & \alpha_{-12} & \cdots & \alpha_{-1p} \\ \alpha_{-21} & \alpha_{-22} & \cdots & \alpha_{-2p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{-p1} & \alpha_{-p2} & \cdots & \alpha_{-pp} \end{vmatrix}$$

und werden die Unterdeterminanten durch

$$(2) \qquad \Delta_{\lambda\mu} = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{-\lambda\mu}}$$

bezeichnet, so ist das μ^{te} Normalintegral 1. Gattung

$$(3) \qquad u_\mu(x) = \pi i \sum_\lambda \frac{\Delta_{\lambda\mu}}{\Delta} \omega_{-\lambda}(x). \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

Irgend ein Integral erster Gattung w, das an den Querschnitten erster Art die Periodicitätsmoduln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ hat, wird durch die Normalintegrale in der Form

$$(4) \qquad w = \frac{1}{\pi i} \sum_\mu \alpha_\mu u_\mu$$

dargestellt.

An den Querschnitten 2. Art hat das Normalintegral u_μ die Periodicitätsmoduln

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi i} \sum_\lambda \frac{\Delta_{\lambda\mu}}{\Delta} \beta_{-\lambda\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

und es ist bekanntlich

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}.$$

Neben die Darstellung (3) der Normalintegrale 1. Gattung durch ein System von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung tritt eine andere durch die Integrale $A_\lambda(x)$ und $B_\lambda(x)$, die in mancher Hinsicht Vorzüge vor der ersteren bietet. Es ist nämlich die Untersuchung der in der ersten Darstellung auftretenden, aus Periodicitätsmoduln gebildeten Determinanten bis jetzt noch nicht in wünschenswerter Weise durchgeführt worden und scheint auch beträchtliche Schwierigkeiten zu bieten, während man auf der anderen Seite in den verschiedenen Ausdrücken für die Funktionen A_λ und B_λ und ihren ausgezeichnet einfachen Eigenschaften Mittel besitzt, um in vielen Fällen mit ihnen vorteilhaft arbeiten zu können.

Diese Beziehung zwischen den Normalintegralen 1. Gattung und den Periodicitätsmoduln des Integrals r entspricht dem Satz aus der Theorie der Abel'schen Integrale, dass sich die zweite Hälfte der Periodicitätsmoduln eines Integrals 3. Gattung (das stets als eine Differenz von r-Funktionen aufgefasst werden kann) ausdrückt durch die erste Hälfte und die zwischen den Unstetigkeitspunkten als Grenzen genommenen Normalintegrale 1. Gattung.[1] Wir leiten sie in folgender Weise ab:

Es gilt der Satz:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $b_1, b_2, \ldots, b_p$ die Periodicitätsmoduln irgend eines Integrals erster Gattung w an den gleichbezeichneten Querschnitten, so ist bis auf eine Integrationsconstante

$$w = \frac{1}{2\pi i} \sum_\lambda (a_\lambda B_\lambda(x) - b_\lambda A_\lambda(x)). \tag{5}$$

Offenbar hat die rechte Seite infolge des im vorigen Paragraphen gefundenen Verhaltens der A_λ und B_λ an den Querschnitten die gleichen

[1] Clebsch-Gordan, *Theorie der Abel'schen Funktionen.* S. 119.

Periodicitätsmoduln, wie das Integral w. Es ist also zum Beweise des Satzes nur zu zeigen, dass die Summe rechts in T' von jeder Unstetigkeit frei ist. Zu diesem Behufe führen wir die Darstellungen der A_λ und B_λ durch die Hauptintegrale (§ 5 Gleichungen (1)) ein und erhalten

$$w = \frac{1}{4\pi i}\sum_{n=-p}^{p} n\omega_{-n}(x)\sum_\lambda (a_\lambda \beta_{n\lambda} - b_\lambda \alpha_{n\lambda})$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\sum_{n=1}^{p} n\omega_{-n}(x)\sum_\lambda (a_\lambda \beta_{n\lambda} - b_\lambda \alpha_{n\lambda}) - \frac{1}{4\pi i}\sum_{n=1}^{p} n\omega_n(x)\sum_\lambda (a_\lambda \beta_{-n\lambda} - b_\lambda \alpha_{-n\lambda}).$$

Hier setzt sich die erste Summe aus den Hauptintegralen 1. Gattung zusammen, ist also überall stetig. Die zweite Summe dagegen fällt fort, da wegen der bekannten bilinearen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln je zweier Integrale 1. Gattung

$$\sum_\lambda (a_\lambda \beta_{-n\lambda} - b_\lambda \alpha_{-n\lambda}) = 0$$

ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir erhalten jetzt sofort als Darstellung der Normalintegrale 1. Gattung durch die Integrale A_λ und B_λ:

$$(6) \qquad 2u_\mu(x) = B_\mu(x) - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda a_{\mu\lambda} A_\lambda(x).$$

Wir führen nun für die Integranden der Normalintegrale 1. Gattung die Bezeichnung ein:

$$\frac{du_\mu}{dz} = \frac{\Phi_\mu(z)}{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

Es sind also die $\Phi_\mu(z)$ *ganze Funktionen von z vom Grade $p-1$* und ich behaupte:

Die Funktionen $\Phi_\mu(z)$ haben die Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$\Delta_i(\Phi_\mu) = \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\Phi_\mu(z)}{s}\right)$$

für jede derselben den nämlichen Wert hat.

Beweis. Differenziiren wir Gleichung (6) nach z und multiplicieren mit $\frac{s}{2}$, so erhalten wir

$$\Phi_\mu(z) = \frac{1}{2} Q_\mu(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_\lambda a_{\mu\lambda} P_\lambda(z).$$

Hier haben wir also Φ_μ durch die im vorigen Paragraphen eingeführten Funktionen P_λ und Q_λ dargestellt und es ist in den dort am Schluss benutzten Bezeichnungen:

$$A_{\mu\lambda} = -\frac{1}{2\pi i} a_{\mu\lambda}, \qquad B_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}(\mu\lambda).$$

Soll nun der obige Satz richtig sein, so müssen, wie wir gesehen haben,

$$c_\lambda^{(i)} = \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)} \frac{\partial A_{\mu\lambda}}{\partial e_i} \quad \text{und} \quad d_\lambda^{(i)} = \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)} \frac{\partial B_{\mu\lambda}}{\partial e_i}$$

vom Index μ unabhängig sein. Von den $d_\lambda^{(i)}$ ist das evident, denn sie sind alle null. Dagegen sind die $c_\lambda^{(i)}$ von μ unabhängig, wenn $\frac{1}{\Phi_\mu(e_i)} \frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial e_i}$ von μ unabhängig ist. Das ist aber in der That der Fall, denn es ist, wie Herr THOMAE[1] gefunden hat

$$\frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial e_i} = 4 \frac{\Phi_\mu(e_i)\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)}. \qquad \binom{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, p}{i = 0, 1, \ldots, 2p+1} \tag{7}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Aus der letzten Gleichung finden wir weiter

$$c_\lambda^{(i)} = -\frac{2}{\pi i} \frac{\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)},$$

[1] THOMAE, Crelles Journ. Bd. 71, S. 212. Vgl. auch SCHRÖDER, *Über den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- und ϑ-funktionen,* Diss. Göttingen 1890, S. 35. Die Formel ergibt sich übrigens sofort durch Ausführung des über die Querschnitte erstreckten Integrals $\int\limits_T \frac{\partial u_\mu}{\partial e_i} du_\lambda = \int\limits_T \frac{\partial u_\mu}{\partial e_i} \frac{\Phi_\lambda(z)}{s} dz$.

also liefert Formel (13) im vorigen Paragraphen:

(8 a) $$\tau_i = \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\Phi_\mu(z)}{s}\right) = -\frac{1}{f'(e_i)}\frac{d}{dz}\frac{s}{z-e_i} - \frac{2}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)}\frac{P_\lambda(z)}{s}$$

und durch Integration erhalten wir

(9 a) $$\frac{1}{\Phi_\mu(e_i)}\frac{\partial u_\mu}{\partial e_i} = T_i(x) = -\frac{s}{f'(e_i)(z-e_i)} - \frac{2}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)} A_\lambda(x).$$

Eine zweite Darstellung der Funktionen τ_i und T_i liefert der vorletzte Satz im vorigen Paragraphen. Es ist nämlich nach (4)

$$\omega_{-\mu} = \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{-\mu\lambda} u_\lambda,$$

also

$$\varphi_{p-\mu}(z) = \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{-\mu\lambda}\,\Phi_\lambda(z),$$

daher können wir nach dem erwähnten Satz sofort hinschreiben

$$\frac{1}{2s(z-e_i)} = \tau_i + \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \frac{1}{\varphi_{p-\mu}(e_i)}\frac{\partial \alpha_{-\mu\lambda}}{\partial e_i}\frac{\Phi_\lambda(z)}{s}$$

oder da nach (6) in § 3:

$$\frac{1}{\varphi_{p-\mu}(e_i)}\frac{\partial \alpha_{-\mu\lambda}}{\partial e_i} = p_{i\lambda}$$

ist:

(8 b) $$\tau_i = \frac{1}{2s(z-e_i)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda p_{i\lambda}\frac{\Phi_\lambda(z)}{s}$$

und

(9 b) $$T_i(x) = \frac{\partial \omega(x)}{\partial e_i} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda p_{i\lambda} u_\lambda(x).$$

Die Integrale $\frac{\partial u_\mu}{\partial e_i}$ sind schon wiederholt bei Untersuchungen im Gebiete der hyperelliptischen Integrale verwandt worden, besonders von Herrn

Thomae,[1] doch habe ich den Satz, dass $\frac{1}{\Phi_\mu(e_i)}\frac{\partial u_\mu}{\partial e_i}$ für jedes μ denselben Wert hat, nirgends ausgesprochen gefunden.

Das Integral $T_i(x)$ unterscheidet sich, wie (9b) zeigt, von $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ nur durch ein Integral erster Gattung, wird also auch nur im Verzweigungspunkt e_i unstetig.

Wir wollen mit Hülfe der Darstellung (9a) die ersten Glieder der Entwicklung von $T_i(x)$ in irgend einem Verzweigungspunkt ermitteln und fassen daher zunächst die Entwicklung der Integrale $A_\lambda(x)$ ins Auge. Wir gehen dabei zurück auf die Definition dieser Funktionen als Querschnittintegrale (§ 4, (4)), also auf die Formel

$$A_\lambda(x) = \int_{b_\lambda}^{\bullet} \frac{\sigma + s}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{2\sigma}.$$

Hier entwickeln wir die Funktion unter dem Integralzeichen als Funktion von z in der Umgebung irgend eines Verzweigungspunkts e_k und erhalten

$$\text{in } e_k: \qquad A_\lambda(x) = \int_{b_\lambda}^{\bullet} \frac{\sigma + \sqrt{f'(e_k)}\sqrt{z - e_k} + \cdots}{2(\zeta - e_k)\sigma}\, d\zeta.$$

Bedenken wir nun, dass

$$\int_{b_\lambda}^{\bullet} \frac{d\zeta}{2\sigma(\zeta - e_k)} = p_{k\lambda}$$

ist, so folgt hieraus

$$A_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_{b_\lambda}^{\bullet} \frac{d\zeta}{\zeta - e_k} + p_{k\lambda}\sqrt{f'(e_k)}\sqrt{z - e_k} + \cdots.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist nur dann von null verschieden, wenn der Integrationsweg b_λ den Verzweigungspunkt e_k einschliesst, also

---

[1] Thomae, Crelles Journ. Bd. 71, ferner Bd. 93, 94, 101 über Integrale zweiter Gattung.

wenn λ gleich der grössten in $\frac{k}{2}$ enthaltenen Zahl ist. Nennen wir diese Zahl k', so dass

$$(10) \qquad k' = E\left(\frac{k}{2}\right),$$

so ist offenbar $\int\limits_{b_\lambda} \frac{d\zeta}{\zeta - e_k} = 2\pi i(\lambda k')$, also

$$(11) \qquad \text{in } e_k\colon \quad A_\lambda(x) = \pi i(\lambda k') + p_{k\lambda}\sqrt{f'(e_k)}\sqrt{z-e_k} + \cdots.$$

Um die Entwicklung von $T_i(x)$ zu finden brauchen wir noch diejenige von $\frac{s}{z - e_i}$ und haben dabei zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Ist e_k *ein von* e_i *verschiedener Verzweigungspunkt,* so ist

$$(12\,\text{a}) \qquad \text{in } e_k\colon \quad \frac{s}{z-e_i} = \frac{\sqrt{f'(e_k)}}{e_k - e_i}\sqrt{z-e_k} + \cdots.$$

2) Im Verzweigungspunkt e_i ist

$$(12\,\text{b}) \qquad \frac{s}{z-e_i} = \sqrt{f'(e_i)}\left[\frac{1}{\sqrt{z-e_i}} + \frac{1}{4}\frac{f''(e_i)}{f'(e_i)}\sqrt{z-e_i} + \cdots\right].$$

Die Entwicklungen (11) und (12) führen wir jetzt in (9a) ein und erhalten

in e_k: $(k \gtrless i)$

$$T_i(x) = -2\frac{\Phi_{k'}(e_i)}{f'(e_i)} + \frac{2\sqrt{f'(e_k)}}{f'(e_i)}\left[\frac{1}{2(e_i-e_k)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i)p_{k\lambda}\right]\sqrt{z-e_k} + \cdots,$$

$$\text{in } e_i\colon \quad T_i(x) = -\frac{1}{\sqrt{f'(e_i)}\sqrt{z-e_i}} - 2\frac{\Phi_i'(e_i)}{f'(e_i)}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{f'(e_i)}}\left[\frac{1}{8}\frac{f''(e_i)}{f'(e_i)} + \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i)p_{i\lambda}\right]\sqrt{z-e_i} + \cdots.$$

Wir wollen diese Formeln noch etwas weiter ausarbeiten. Es ist nämlich nicht ohne Interesse, dass sich die Coeffizienten von $\sqrt{z-e_k}$ resp. $\sqrt{z-e_i}$ auf der rechten Seite in recht eleganter Weise durch die Deter-

minante Δ ausdrücken lassen. Differentiieren wir nämlich Δ nach dem Verzweigungspunkt e_i, so ist offenbar

$$\frac{\partial \Delta}{\partial e_i} = \sum_\lambda \sum_\mu \frac{\partial \Delta}{\partial a_{-\lambda\mu}} \frac{\partial a_{-\lambda\mu}}{\partial e_i} = \sum_\lambda \sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} \frac{\partial a_{-\lambda\mu}}{\partial e_i},$$

oder da nach (6) in § 3:

$$\frac{\partial a_{-\lambda\mu}}{\partial e_i} = \varphi_{p-\lambda}(e_i) p_{i\mu}$$

so ist:

(13) $$\frac{\partial \Delta}{\partial e_i} = \sum_\lambda \sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} \varphi_{p-\lambda}(e_i) p_{i\mu}.$$ [1]

Nun folgt aber aus Gleichung (3) dieses Paragraphen, wenn wir nach z differentiieren

$$\sum_\lambda \Delta_{\lambda\mu} \varphi_{p-\lambda}(z) = \frac{1}{\pi i} \Delta\, \Phi_\mu(z),$$

also finden wir aus Gleichung (13)

(14) $$\frac{\partial \log \Delta}{\partial e_i} = \frac{1}{\pi i} \sum_\mu \Phi_\mu(e_i) p_{i\mu}.$$

Das ist aber grade die Summe, die in der obigen Entwicklung von $T_i(x)$ im Coeffizienten von $\sqrt{z - e_i}$ auftritt. Wir nehmen hierzu die leicht zu beweisende Formel

$$\frac{f''(e_i)}{f'(e_i)} = \frac{\partial \log F}{\partial e_i},$$

wo

F die Discriminante von $f(z)$

bedeutet und haben

(15) $$\frac{1}{8} \frac{f''(e_i)}{f'(e_i)} + \frac{1}{\pi i} \sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i) p_{i\lambda} = \frac{\partial \log (\Delta \sqrt[8]{F})}{\partial e_i}.$$

[1] Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (8) und (10) in § 3 erhält man leicht die Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial \Delta}{\partial e_i} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_i e_i \frac{\partial \Delta}{\partial e_i} = -\frac{p(p+1)}{2} \Delta.$$

(Vgl. Wiltheiss, Math. Ann. Bd. 31, S. 142.)

Wir wenden uns jetzt zu dem Coeffizienten von $\sqrt{z - e_k}$ in der Entwicklung von $T_i(x)$. Den hier in der Klammer stehenden Ausdruck erhalten wir offenbar, wenn wir in Gleichung (8 b) den Index i durch k ersetzen, mit s multiplicieren und dann $z = e_i$ setzen. Dann wird

$$(16\text{a}) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2(e_i - e_k)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i) p_{k\lambda} &= \lim_{z=e_i} s\tau_k = \lim_{z=e_i} \frac{s}{\Phi_\mu(e_k)} \frac{\partial}{\partial e_k}\left(\frac{\Phi_\mu(z)}{s}\right) \\ &= \frac{1}{\Phi_\mu(e_k)}\left[\frac{\partial \Phi_\mu(e_i)}{\partial e_k} + \frac{\Phi_\mu(e_i)}{2(e_i - e_k)}\right]. \end{aligned}$$

Die rechte Seite lässt sich umformen. Es ist nämlich

$$\frac{1}{e_i - e_k} = -\frac{1}{f'(e_i)} \frac{\partial f'(e_i)}{\partial e_k},$$

also

$$\frac{\partial \Phi_\mu(e_i)}{\partial e_k} + \frac{\Phi_\mu(e_i)}{2(e_i - e_k)} = \frac{\partial \Phi_\mu(e_i)}{\partial e_k} - \frac{1}{2f'(e_i)} \frac{\partial f'(e_i)}{\partial e_k} \Phi_\mu(e_i) = \frac{f'(e_i)}{2\Phi_\mu(e_i)} \frac{\partial}{\partial e_k}\left[\frac{\Phi_\mu(e_i)^2}{f'(e_i)}\right].$$

Nun folgt aber aus Gleichung (7) in diesem Paragraphen

$$\frac{\Phi_\mu(e_i)^2}{f'(e_i)} = \frac{1}{4} \frac{\partial a_{\mu\mu}}{\partial e_i},$$

also ist

$$\frac{1}{2(e_i - e_k)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i) p_{k\lambda} = \frac{1}{8} \frac{f'(e_i)}{\Phi_\mu(e_i)\Phi_\mu(e_k)} \frac{\partial^2 a_{\mu\mu}}{\partial e_i \partial e_k}.$$

Setze ich nun

$$(17) \quad \frac{1}{8\Phi_\mu(e_i)\Phi_\mu(e_k)} \frac{\partial^2 a_{\mu\mu}}{\partial e_i \partial e_k} = \eta_{ik},$$

so bleibt η_{ik} *unverändert, wenn ich i und k vertausche* und hat überdies für jedes μ den nämlichen Wert. Wir haben dann

$$(16\text{b}) \quad \frac{1}{2(e_i - e_k)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i) p_{k\lambda} = f'(e_i)\eta_{ik}.$$

Wir finden jetzt schliesslich, wenn wir (15) und (16 b) in die Entwicklung von $T_i(x)$ eintragen:

$$(18)\quad \begin{aligned} &\text{in } e_k\colon (k \gtrless i)\ T_i(x) = && -2\frac{\Phi_{k'}(e_i)}{f'(e_i)} + 2\sqrt{f'(e_k)}\eta_{ik}\sqrt{z-e_k}+\ldots,\\ &\text{in } e_i\colon \qquad T_i(x) = -\frac{1}{\sqrt{f'(e_i)}\sqrt{z-e_i}} - 2\frac{\Phi_{i'}(e_i)}{f'(e_i)}. && \\ & && -\frac{2}{\sqrt{f'(e_i)}}\frac{\partial \log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_i}\sqrt{z-e_i}+\ldots. \end{aligned}$$

Um nun noch η_{ik} durch die Determinante Δ auszudrücken, differentiieren wir Gleichung (14) nach e_k und benutzen dabei gleich die Formel (12) in § 3. Dann kommt

$$\frac{\partial^2 \log\Delta}{\partial e_i \partial e_k} = \frac{1}{\pi i}\sum_\mu \frac{\partial \Phi_\mu(e_i)}{\partial e_k}p_{i\mu} + \frac{1}{2\pi i(e_i-e_k)}\sum_\mu \Phi_\mu(e_i)(p_{i\mu}-p_{k\mu}).$$

Nun ist nach (16a) und (16b)

$$\frac{\partial \Phi_\mu(e_i)}{\partial e_k} = f'(e_i)\Phi_\mu(e_k)\eta_{ik} - \frac{\Phi_\mu(e_i)}{2(e_i-e_k)},$$

also haben wir

$$\frac{\partial^2 \log\Delta}{\partial e_i \partial e_k} = \frac{f'(e_i)}{\pi i}\sum_\mu \Phi_\mu(e_k)p_{i\mu}\eta_{ik} - \frac{1}{2\pi i(e_i-e_k)}\sum_\mu \Phi_\mu(e_i)p_{k\mu},$$

oder nach (16b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log\Delta}{\partial e_i \partial e_k} &= f'(e_i)\eta_{ik}\left(\frac{1}{2(e_k-e_i)} - f'(e_k)\eta_{ik}\right) - \frac{1}{2(e_i-e_k)}\left(\frac{1}{2(e_i-e_k)} - f'(e_i)\eta_{ik}\right)\\ &= -f'(e_i)f'(e_k)\eta_{ik}^2 - \frac{1}{4(e_i-e_k)^2}. \end{aligned}$$

Es ist aber, was leicht einzusehen

$$\frac{1}{(e_i-e_k)^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log F}{\partial e_i \partial e_k},$$

folglich erhalten wir schliesslich als die gesuchte Formel:

$$(19)\qquad f'(e_i)f'(e_k)\eta_{ik}^2 = -\frac{\partial^2 \log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_i \partial e_k},$$

von der wir noch weiterhin Gebrauch machen werden.

Wir notieren noch als Periodicitätsmoduln von $T_i(x)$ nach der Darstellung (9 a):

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\text{an } a_\mu: && \overset{+}{T}_i - \overset{-}{T}_i = 0, \\ &\text{an } b_\mu: && \overset{+}{T}_i - \overset{-}{T}_i = 4\frac{\Phi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}, \end{aligned}$$

und beginnen jetzt eine neue Betrachtung, die uns wiederum zu den Integralen $T_i(x)$ führen wird.

§ 7. *Die Normalintegrale zweiter Gattung.*

Bekanntlich bedient man sich der Normalintegrale erster Gattung, um zu einem beliebigen Integral der Klasse V, das aber nicht Integral 1. Gattung ist, ein anderes W zu finden, das an sämtlichen Querschnitten erster Art stetig ist. Wir nennen W das *zu V gehörige transcendent normierte Integral.* Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ die Periodicitätsmoduln von V an den Querschnitten erster Art, so ist

$$W = V - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_\lambda u_\lambda.$$

Danach ist also beispielsweise, wie (9 b) zeigt, $T_i(x)$ das zu $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ gehörige transcendent normierte Integral.

Wir wollen nun die Integrale untersuchen, die wir durch solche transcendente Normierung aus den Hauptintegralen zweiter Gattung gewinnen.

Wir definieren sie, indem wir jedes mit einem constanten Faktor multiplicieren, durch die Gleichung

$$(1\text{ a})\qquad 2v_\mu(x) = \mu\omega_\mu(x) - \frac{\mu}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda} u_\lambda, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

und nennen sie die *Normalintegrale zweiter Gattung.*

Wir werden für diese Normalintegrale 2. Gattung eine Reihe von Eigenschaften nachweisen, die durchaus mit bekannten Eigenschaften der Normalintegrale erster Gattung correspondieren, so dass es gerechtfertigt

erscheint, zu dem System der Normalintegrale 1. Gattung grade dieses System von Normalintegralen 2. Gattung hinzuzufügen, die dann zusammen ebenso ein vollständiges System von Fundamentalintegralen bilden, wie die Hauptintegrale oder die Integrale A_μ und B_μ.

Wir wollen zunächst das über sämtliche Querschnitte erstreckte Integral

$$I = \int_{T'} \omega_\mu du_\nu = \int_{T'} \omega_\mu \frac{\Phi_\nu(z)}{s} dz$$

betrachten. Ein erster Wert desselben ist

$$I = -\pi i\left[\beta_{\mu\nu} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda} a_{\lambda\nu}\right]$$

und hier ist, wie man aus (1) sieht, die Klammer proportional dem Periodicitätsmodul des Integrals v_μ am Querschnitt b_ν.

Einen zweiten Wert erhält man durch Entwicklung des Integranden im Unendlichen. Es ist aber

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \omega_\mu = \pm\frac{z^\mu}{\mu} + \Sigma_{p+1},$$

$$\frac{\Phi_\nu(z)}{s} = \pm\pi i\left[\frac{\Delta_{1\nu}}{\Delta}\frac{1}{z^2} + \frac{\Delta_{2\nu}}{\Delta}\frac{1}{z^3} + \dots + \frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}\frac{1}{z^{\mu+1}} + \dots\right] + \Sigma_{p+2},$$

also

$$\omega_\mu \frac{\Phi_\nu(z)}{s} = \dots + \frac{\pi i}{\mu}\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}\frac{1}{z} + \dots,$$

folglich ist auch

$$I = -2\pi i \,.\, 2\pi i \frac{1}{\mu}\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}$$

und wir haben daher die Formel

$$\beta_{\mu\nu} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda} a_{\lambda\nu} = \frac{4\pi i}{\mu}\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}. \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, p) \tag{2}$$

Es sind also die Periodicitätsmoduln der Normalintegrale 2. Gattung:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} &\text{an } a_\nu: \quad \overset{+}{v}_\mu - \overset{-}{v}_\mu = 0, \\ &\text{an } b_\nu: \quad \overset{+}{v}_\mu - \overset{-}{v}_\mu = 2\pi i \frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun in die Definitionsgleichung (1) der Normalintegrale 2. Gattung an Stelle der Integrale u_λ die Hauptintegrale 1. Gattung mit Hülfe von Gleichung (3) des vorigen Paragraphen einführen. Es kommt dann

$$2v_\mu(x) = \mu\omega_\mu(x) - \sum_\nu c_{\mu\nu}\omega_{-\nu}(x) \tag{1 b}$$

und darin ist

$$c_{\mu\nu} = \mu\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\frac{\Delta_{\nu\lambda}}{\Delta}. \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{4}$$

Für diese Grössen $c_{\mu\nu}$ besteht der merkwürdige Satz

$$c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}, \tag{5}$$

denn das Querschnittintegral $K = \int\limits_{T'} \omega_\nu dv_\mu$ ist erstens:

$$2\pi i\sum_\lambda \alpha_{\nu\lambda}\frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta} = \frac{2\pi i}{\nu}c_{\nu\mu}.$$

Andererseits ist

$$\text{in } \genfrac{}{}{0pt}{}{\Sigma_1}{\Sigma_2}: \qquad \omega_\nu = \pm\frac{z^\nu}{\nu} + \Sigma_{p+1},$$

$$\frac{dv_\mu}{dz} = \pm\frac{1}{2}\left[\mu z^{\mu-1} - \frac{c_{\mu1}}{z^2} - \frac{c_{\mu2}}{z^3} - \ldots - \frac{c_{\mu\nu}}{z^{\nu+1}} - \ldots - \frac{c_{\mu p}}{z^{p+1}}\right] + \Sigma_{p+2}$$

also

$$\omega_\nu\frac{dv_\mu}{dz} = \ldots - \frac{c_{\mu\nu}}{2\nu}\frac{1}{z} + \ldots$$

und

$$K = \frac{2\pi i}{\nu}c_{\mu\nu},$$

womit (5) bewiesen ist.

Als dritte Darstellung der Normalintegrale 2. Gattung notieren wir die durch die Periodicitätsmoduln der Funktion r:

$$v_\mu(x) = -\sum_\lambda \frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta}A_\lambda(x). \tag{1 c}$$

Wir führen jetzt durch

$$(6) \qquad \frac{dv_\mu}{dz} = \frac{\Psi_\mu(z)}{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

die ganzen Funktionen $(p+\mu)^{\text{ten}}$ Grades ein:

$$(7) \qquad 2\Psi_\mu(z) = \mu\varphi_{p+\mu}(z) - \frac{\mu}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\Phi_\lambda(z)$$

und differentiieren (1 a) nach e_i. Dann kommt, wenn wir frühere Ergebnisse benutzen:

$$2\frac{\partial v_\mu}{\partial e_i} = \mu\varphi_{p+\mu}(e_i)\frac{\partial\omega}{\partial e_i} - \frac{\mu}{\pi i}\sum_\lambda \varphi_{p+\mu}(e_i)p_{i\lambda}u_\lambda - \frac{\mu}{\pi i}T_i\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\Phi_\lambda(e_i)$$

$$= \mu\varphi_{p+\mu}(e_i)\left[\frac{\partial\omega}{\partial e_i} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda p_{i\lambda}u_\lambda\right] - T_i\frac{\mu}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\Phi_\lambda(e_i),$$

folglich nach (9 b) in § 6 und (7):

$$(8) \qquad \frac{\partial v_\mu}{\partial e_i} = \Psi_\mu(e_i)T_i(x).$$

Wir finden also den Satz:

Der Ausdruck $\frac{1}{\Psi_\mu(e_i)}\frac{\partial v_\mu}{\partial e_i}$ *ist vom Index* μ *unabhängig und ebenso wie der entsprechende aus den Normalintegralen* 1. *Gattung gewonnene Ausdruck gleich dem Integral* $T_i(x)$.

Als erste Folgerung ergibt sich aus diesem Satz, wenn wir in (8) zu den Periodicitätsmoduln an den Querschnitten 2. Art übergehen:

$$(9) \qquad \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}\right) = \frac{2}{\pi i}\frac{\Phi_\nu(e_i)\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}.$$

Hat diese Formel schon grosse Ähnlichkeit mit der Thomae'schen partiellen Differentialgleichung (7) des vorigen Paragraphen, so entspricht dieser doch noch vollständiger eine andere Gleichung, die wir folgendermassen finden.

Es ist nach dem auch im Paragraphen 5 benutzten Hauptsatze der Determinantenlehre

$$\sum_\lambda \alpha_{-\mu\lambda} \frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta} = 1.$$

Wir differentiieren diese Gleichung nach e_i und haben in Rücksicht auf Gleichung (6) in § 3 und auf die eben gefundene Formel

$$0 = \varphi_{p-\mu}(e_i) \sum_\lambda p_{i\lambda} \frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta} + \frac{2}{\pi i} \frac{\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)} \sum_\lambda \alpha_{-\mu\lambda} \Phi_\lambda(e_i),$$

oder da

$$\frac{1}{\pi i} \sum_\lambda \alpha_{-\mu\lambda} \Phi_\lambda(e_i) = \varphi_{p-\mu}(e_i)$$

ist:

$$(10) \qquad \frac{\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)} = -\frac{1}{2} \sum_\lambda p_{i\lambda} \frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta}.$$

Jetzt wollen wir die durch Gleichung (4) definierte Grösse $c_{\mu\nu}$ nach e_i differenziieren. Wir erhalten dann, wieder mit Benutzung von (9)

$$\frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial e_i} = \mu \varphi_{p+\mu}(e_i) \sum_\lambda p_{i\lambda} \frac{\Delta_{\nu\lambda}}{\Delta} + \frac{2\mu}{\pi i} \frac{\Psi_\nu(e_i)}{f'(e_i)} \sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda} \Phi_\lambda(e_i),$$

oder nach der zuletzt gefundenen Formel:

$$\frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial e_i} = -2 \frac{\Psi_\nu(e_i)}{f'(e_i)} \left[\mu \varphi_{p+\mu}(e_i) - \frac{\mu}{\pi i} \sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda} \Phi_\lambda(e_i) \right].$$

Hier steht aber nach (7) in der Klammer grade $2\Psi_\mu(e_i)$, also ist schliesslich

$$(11) \qquad \frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial e_i} = -4 \frac{\Psi_\mu(e_i) \Psi_\nu(e_i)}{f'(e_i)}.$$

Eine Gegenüberstellung der Eigenschaften der Normalintegrale erster und zweiter Gattung wird ihren durchgehenden Parallelismus deutlich hervortreten lassen.

$$u_\mu = \pi i \sum_\lambda \frac{\Delta_{\lambda\mu}}{\Delta}\omega_{-\lambda}, \qquad v_\mu = -\sum_\lambda \frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta} A_\lambda,$$

$$2u_\mu = B_\mu - \frac{1}{\pi i}\sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu, \qquad 2v_\mu = \mu\omega_\mu - \sum_\nu c_{\mu\nu}\omega_{-\nu},$$

$$a_{\mu\nu} = \pi i \sum_\lambda \beta_{-\lambda\mu}\frac{\Delta_{\lambda\nu}}{\Delta}, \qquad c_{\mu\nu} = \mu\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\frac{\Delta_{\nu\lambda}}{\Delta},$$

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}, \qquad c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu},$$

$$\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial e_i} = 4\frac{\Phi_\mu(e_i)\,\Phi_\nu(e_i)}{f'(e_i)}, \qquad \frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial e_i} = -4\frac{\Psi_\mu(e_i)\,\Psi_\nu(e_i)}{f'(e_i)},$$

(12)
$$\frac{1}{\Phi_\mu(e_i)}\frac{\partial u_\mu}{\partial e_i} = \frac{1}{\Psi_\nu(e_i)}\frac{\partial v_\nu}{\partial e_i} = T_i.$$

Die bisherigen Entwicklungen in diesem und dem vorigen Paragraphen haben uns zu einer Reihe von Sätzen geführt ((7) in § 6 und (9), (11), (12) in diesem Paragraphen), deren gemeinsamer Charakter sich in folgendem Satze ausspricht:

Es seien t_i und t'_i irgend zwei der $(2p+1)(2p+2)$ Grössen

$$T_i\,;\ \frac{\Phi_1(e_i)}{f'(e_i)},\ \frac{\Phi_2(e_i)}{f'(e_i)},\ \ldots,\ \frac{\Phi_p(e_i)}{f'(e_i)};\ \frac{\Psi_1(e_i)}{f'(e_i)},\ \frac{\Psi_2(e_i)}{f'(e_i)},\ \ldots,\ \frac{\Psi_p(e_i)}{f'(e_i)},\quad (i=0,1,\ldots,2p+1)$$

dann ist das Produkt $f'(e_i)t_i t'_i$ jedesmal gleich der Derivierten einer gewissen Funktion W der Verzweigungspunkte nach e_i:

$$f'(e_i)t_i t'_i = \frac{\partial W}{\partial e_i}.$$

Die folgenden Betrachtungen werden nun dazu führen, für alle diese Grössen t_i $(i = 0, 1, \ldots, 2p+1)$ ein System partieller Differentialgleichungen aufzustellen, aus dem sich dieser Satz in einfacher Weise ergibt.

Wir differentiieren die Gleichung (9 b) des vorigen Paragraphen nach einem von e_i verschiedenen Verzweigungspunkt e_k und erhalten mit Rücksicht auf die Formeln (11) und (12) in § 3:

$$\frac{\partial T_i}{\partial e_k} = \frac{1}{2(e_i-e_k)}\left(\frac{\partial\omega}{\partial e_i} - \frac{\partial\omega}{\partial e_k}\right) - \frac{1}{2\pi i(e_i-e_k)}\sum_\lambda (p_{i\lambda} - p_{k\lambda})u_\lambda - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda p_{i\lambda}\frac{\partial u_\lambda}{\partial e_k}$$

oder offenbar

$$\frac{\partial T_i}{\partial e_k} = \frac{T_i - T_k}{2(e_i - e_k)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda p_{i\lambda}\frac{\partial u_\lambda}{\partial e_k}.$$

Hier ersetzen wir in der Summe rechts $\frac{\partial u_\lambda}{\partial e_k}$ durch $\Phi_\lambda(e_k)T_k$. Dann erhält T_k den Faktor

$$\frac{1}{2(e_k - e_i)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda p_{i\lambda}\,\Phi_\lambda(e_k)$$

und dies ist, wie man aus (16b) im vorigen Paragraphen ersieht, gleich $f'(e_k)\eta_{ik}$, folglich haben wir

$$\frac{\partial T_i}{\partial e_k} = \frac{T_i}{2(e_i - e_k)} + f'(e_k)\eta_{ik}T_k. \qquad \begin{matrix}(i, k = 0, 1, \ldots, 2p+1)\\(i \gtrless k)\end{matrix} \tag{13}$$

Dieses System partieller Differentialgleichungen hat nun nicht nur die Integrale T_i $(i = 0, 1, \ldots, 2p+1)$, *sondern auch alle andern oben aufgeführten Grössen* t_i *zu Lösungen.* Dies folgt für die Grössen $\frac{\Phi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ aus ihrer Eigenschaft, (bis auf constante Faktoren) Periodicitätsmoduln der Integrale T_i zu sein, für die Grössen $\frac{\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}$ ergibt es sich beispielsweise mit Leichtigkeit aus Gleichung (10), wenn man sie nach e_k differentiiert und (9) berücksichtigt. Ausserdem werden die Gleichungen erfüllt durch jedes System von Derivierten der Integrale $T_0(x), \ldots, T_{2p+1}(x)$ nach z zu beliebig hoher Ordnung.

Es seien jetzt

$$t_0, t_1, \ldots, t_{2p+1}$$

und

$$t'_0, t'_1, \ldots, t'_{2p+1}$$

zwei Systeme von Lösungen, so dass

$$\frac{\partial t_i}{\partial e_k} = \frac{t_i}{2(e_i - e_k)} + f'(e_k)\eta_{ik}t_k, \tag{13a}$$

$$\frac{\partial t'_i}{\partial e_k} = \frac{t'_i}{2(e_i - e_k)} + f'(e_k)\eta_{ik}t'_k. \tag{13b}$$

Zu beiden Gleichungen nehme ich die aus ihnen durch Vertauschung von i und k folgenden, wodurch η_{ik} ungeändert bleibt:

(13c) $$\frac{\partial t_k}{\partial e_i} = -\frac{t_k}{2(e_i - e_k)} + f'(e_i)\eta_{ik} t_i,$$

(13d) $$\frac{\partial t'_k}{\partial e_i} = -\frac{t'_k}{2(e_i - e_k)} + f'(e_i)\eta_{ik} t'_i$$

und eliminiere η_{ik} sowohl aus (13a) und (13d), wie aus (13b) und (13c). Dann kommt:

$$f'(e_i)t'_i \frac{\partial t_i}{\partial e_k} - f'(e_k)t_k \frac{\partial t'_k}{\partial e_i} = \frac{1}{2(e_i - e_k)}[f'(e_i)t_i t'_i + f'(e_k)t_k t'_k],$$

$$f'(e_i)t_i \frac{\partial t'_i}{\partial e_k} - f'(e_k)t'_k \frac{\partial t_k}{\partial e_i} = \frac{1}{2(e_i - e_k)}[f'(e_i)t_i t'_i + f'(e_k)t_k t'_k].$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$f'(e_i)\frac{\partial(t_i t'_i)}{\partial e_k} - f'(e_k)\frac{\partial(t_k t'_k)}{\partial e_i} = -\frac{f'(e_i)}{e_k - e_i} t_i t'_i + \frac{f'(e_k)}{e_i - e_k} t_k t'_k.$$

Nun ist aber:

$$\frac{f'(c_i)}{e_k - e_i} = \frac{\partial f'(e_i)}{\partial e_k}, \qquad \frac{f'(e_k)}{e_i - e_k} = \frac{\partial f'(e_k)}{\partial e_i},$$

also folgt

$$\frac{\partial}{\partial e_k}[f'(e_i)t_i t'_i] = \frac{\partial}{\partial e_i}[f'(e_k)t_k t'_k]$$

und diese Gleichung führt uns nun zu dem Satz:

Sind $t_0, t_1, \ldots, t_{2p+1}$, $t'_0, t'_1, \ldots, t'_{2p+1}$ *zwei Lösungssysteme der partiellen Differentialgleichungen* (13), *so existiert eine Funktion* W *der Verzweigungspunkte von der Eigenschaft, dass*

(14) $$f'(e_i)t_i t'_i = \frac{\partial W}{\partial e_i}. \qquad (i=0, \ldots, 2p+1)$$

Nun können aber die beiden Lösungssysteme auch identisch sein und daher besteht der Satz:

Jedem Lösungssystem $t_0, t_1, \ldots, t_{2p+1}$ *ist eine Funktion* V *der Verzweigungspunkte derart zugeordnet, dass*

(15) $$f'(e_i)t_i^2 = \frac{\partial V}{\partial e_i}. \qquad (i=0, 1, \ldots, 2p+1)$$

Die Funktionen V genügen einer partiellen Differentialgleichung zweiten Grades, die wir aus (13a) erhalten, wenn wir diese Gleichung mit $2f'(e_i)t_i$ multiplicieren. Dann kommt

$$2f'(e_i)t_i\frac{\partial t_i}{\partial e_k}+\frac{f'(e_i)}{e_k-e_i}t_i^2=2f'(e_i)f'(e_k)\eta_{ik}t_it_k.$$

Die linke Seite ist hier offenbar gleich $\frac{\partial}{\partial e_k}[f'(e_i)t_i^2]=\frac{\partial^2 V}{\partial e_i\partial e_k}$, also folgt durch Quadrieren

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial e_i\partial e_k}\right)^2=4f'(e_i)f'(e_k)\eta_{ik}^2\frac{\partial V}{\partial e_i}\frac{\partial V}{\partial e_k}$$

oder nach Formel (19) im vorigen Paragraphen

(16) $$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial e_i\partial e_k}\right)^2+4\frac{\partial^2\log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_i\partial e_k}\frac{\partial V}{\partial e_i}\frac{\partial V}{\partial e_k}=0. \qquad (i,k = 0,1,\ldots,2p+1)$$

Die Gleichungen (15) und (16) ersetzen das Gleichungssystem (13).

Den Lösungssystemen $\frac{\Phi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}$ und $\frac{\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}$ der Gleichungen (13) sind als Funktionen V die Grössen $a_{\mu\mu}$ resp. $c_{\mu\mu}$ zugeordnet, also sind

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{pp}$$

und

$$c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{pp}$$

Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (16).

Wir wollen jetzt die Funktion V aufsuchen, die gemäss (15) den Integralen T_i zugeordnet ist, fragen aber zuvor etwas allgemeiner nach der Funktion W, die sich gemäss (14) ergibt, wenn wir

$$t_i=T_i(x),\qquad t_i'=T_i(\xi)$$

annehmen, wo ξ ein zweiter variabler Punkt ist. Es ist dann W Funktion von x und ξ und wenn wir setzen

$$W=2\rho(x,\xi),$$

so ist

(17) $$f'(e_i)T_i(x)T_i(\xi)=2\frac{\partial\rho(x,\xi)}{\partial e_i}.$$

Wir wollen hier für $T_i(x)$ die Darstellung (9 b), für $T_i(\xi)$ die Darstellung (9 a) im vorigen Paragraphen einsetzen und erhalten dann

$$f'(e_i)\,T_i(x)\,T_i(\xi) = -\frac{\sigma}{\zeta - e_i}\frac{\partial\omega(x)}{\partial e_i} + \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda}\frac{p_{i\lambda}\sigma}{\zeta - e_i}u_\lambda(x) - \frac{2}{\pi i}\sum_{\lambda}A_\lambda(\xi)\,\Phi_\lambda(e_i)\,T_i(x).$$

Nun ist aber nach § 4 Gleichungen (5) und (6):

$$-\frac{\sigma}{\zeta - e_i}\frac{\partial\omega(x)}{\partial e_i} = 2\frac{\partial r(x\,,\,\xi)}{\partial e_i}, \qquad \frac{p_{i\lambda}\sigma}{\zeta - e_i} = -\,2\frac{\partial A_\lambda(\xi)}{\partial e_i}.$$

ferner ist

$$\Phi_\lambda(e_i)\,T_i(x) = \frac{\partial u_\lambda(x)}{\partial e_i},$$

also folgt

$$f'(e_i)\,T_i(x)\,T_i(\xi) = 2\frac{\partial r(x\,,\,\xi)}{\partial e_i} - \frac{2}{\pi i}\frac{\partial}{\partial e_i}\sum_{\lambda}A_\lambda(\xi)u_\lambda(x).$$

und wir sehen, dass

$$(18)\qquad \rho(x\,,\,\xi) = r(x\,,\,\xi) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda}A_\lambda(\xi)u_\lambda(x).$$

Das ist aber offenbar das *transcendent normierte Integral dritter Gattung.* Es hat als Funktion von z dieselben Unstetigkeiten, wie $r(x\,,\,\xi)$, ist an den Querschnitten erster Art stetig und besitzt am Querschnitt b_λ den Periodicitätsmodul $2u_\lambda(\xi)$. Ferner ist

$$\rho(x\,,\,\xi) = \rho(\xi\,,\,x),$$

wie sich unschwer mit Hülfe von (10) in § 4 ergibt.

Jetzt lassen wir die variablen Punkte x und ξ zusammenrücken, setzen

$$V = 2\,\Omega(x)$$

und haben

$$(19)\qquad f'(e_i)\,T_i(x)^2 = 2\frac{\partial\Omega(x)}{\partial e_i}.$$

Die Funktion $\Omega(x)$ selber lässt sich nicht durch Funktionen und Integrale

der Klasse darstellen, wohl aber ihre Derivierte nach z. Man erhält diese, wenn man in die Gleichung

$$f'(e_i)\, T_i \frac{dT_i}{dz} = \frac{\partial \Omega(x)}{\partial e_i}$$

für T_i die Darstellung (9 a), für $\frac{dT_i}{dz} = \tau_i$ die Darstellung (8 b) in § 6 einsetzt. Es ergibt sich dann auf ähnliche Weise, wie oben

$$\text{(20 a)} \qquad \frac{d\Omega}{dz} = -\frac{1}{2}\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{2}{\pi i}\sum_{\lambda} \frac{\Phi_\lambda(z)}{s} A_\lambda(x).$$

Die Funktion $\Omega(x)$ kann Unstetigkeiten nur in den Verzweigungspunkten und im Unendlichen besitzen.

In den Verzweigungspunkten verhält sich $\Omega(x)$ wie $-\frac{1}{2}\log f(x)$, wir können jedoch auch, die oben gegebene Entwicklung der Integrale T_i in den Verzweigungspunkten benutzend, die ersten Glieder der Entwicklung von Ω in irgend einem Verzweigungspunkt ermitteln.

Wir entwickeln zunächst $\frac{d\Omega}{dz}$ nach (20 a) in der Umgebung des Verzweigungspunkts e_k, indem wir nach (11) im vorigen Paragraphen die Anfangsglieder der Entwicklung der Integrale $A_\lambda(x)$ einführen. Dann haben wir

$$\text{in } e_k\colon\ 2\frac{d\Omega}{dz} = -\frac{1}{z-e_k} - \lim_{z=e_k}\left[\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z-e_k}\right]$$
$$-\frac{4}{\pi i}\sum_{\lambda}\frac{\Phi_\lambda(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}\sqrt{z-e_k}}\left[\pi i(\lambda k') + p_{k\lambda}\sqrt{f'(e_k)}\sqrt{z-e_k} + \ldots\right]$$
$$-\frac{1}{z-e_k} - \frac{1}{2}\frac{f''(e_k)}{f'(e_k)} - 4\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\frac{1}{\sqrt{z-e_k}} - \frac{4}{\pi i}\sum_{\lambda}\Phi_\lambda(e_k)p_{k\lambda} - \ldots$$

oder nach (15) im vorigen Paragraphen

$$\text{in } e_k\colon \qquad 2\frac{d\Omega}{dz} = -\frac{1}{z-e_k} - 4\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\frac{1}{\sqrt{z-e_k}} - 4\frac{\partial\log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_k} - \ldots.$$

Daraus folgt durch Integration

$$2\Omega = -\log(z-e_k) + 2c_k - 8\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\sqrt{z-e_k} - 4\frac{\partial\log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_k}(z-e_k) - \ldots$$

und hierin ist noch die nach z constante Grösse c_k zu bestimmen. Wir differentiieren zu dem Ende die letzte Gleichung nach e_i und erhalten

$$\text{in } e_k: \qquad 2\frac{\partial \Omega}{\partial e_i} = f'(e_i)\,T_i^2$$

$$= 2\frac{\partial c_k}{\partial e_i} - 8\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\right)\sqrt{z-e_k} - 4\frac{\partial^2 \log\left(\Delta\sqrt[8]{F}\right)}{\partial e_i\,\partial e_k}(z-e_k) - \cdots.$$

Andererseits haben wir nach (18) im vorigen Paragraphen

$$\text{in } e_k: \qquad f'(e_i)\,T_i^2 = 4\frac{\Phi_{k'}(e_i)^2}{f'(e_i)} - 8\sqrt{f'(e_k)}\,\Phi_{k'}(e_i)\,\eta_{ik}\sqrt{z-e_k} - \cdots,$$

also folgt

$$2\frac{\partial c_k}{\partial e_i} = 4\frac{\Phi_{k'}(e_i)^2}{f'(e_i)} = \frac{\partial a_{k'k}}{\partial e_i}$$

und da diese Gleichung für jedes i besteht, so ist

$$c_k = \frac{1}{2}a_{k'k}.$$

Die weitere durch Vergleichung der beiden Entwicklungen folgende Relation

$$\sqrt{f'(e_k)}\,\Phi_{k'}(e_i)\,\eta_{ik} = \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\right)$$

wird durch (17) im vorigen Paragraphen bestätigt.

Wir haben also hiermit für Ω in der Umgebung des Verzweigungspunkts e_k die Entwicklung

$$\Omega = -\frac{1}{2}\log(z-e_k) + \frac{1}{2}a_{k'k'} - 4\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\sqrt{z-e_k} - 2\frac{\partial \log\left(\Delta\sqrt[8]{F}\right)}{\partial e_k}(z-e_k) - \cdots$$

$$\left(k' = E\left(\frac{k}{2}\right)\right).$$

Über das Verhalten von Ω im Unendlichen unterrichten wir uns durch eine Umformung der in $\frac{d\Omega}{dz}$ auftretenden Summe $\frac{2}{\pi i}\sum_{\lambda}\frac{\Phi_\lambda(z)}{s}A_\lambda(x)$. Wir werden nämlich finden, dass diese trotz der im Unendlichen vorhandenen Unstetigkeiten der Funktionen $A_\lambda(x)$ dort zur ersten Ordnung null wird.

Es ist nach der Partialbruchzerlegung von LAGRANGE:

$$\frac{\Phi_\lambda(z)}{s} = s\,\frac{\Phi_\lambda(z)}{f(z)} = \sum_i \frac{s\,\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)(z-e_i)},$$

folglich

$$\frac{2}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(z)}{s} A_\lambda(x) = \sum_i \left[\frac{s}{z-e_i}\sum_\lambda \frac{2}{\pi i}\frac{\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)} A_\lambda(x)\right].$$

Hier steht aber in der Klammer grade die in der Darstellung (9 a) im vorigen Paragraphen auftretende Summe, also ist

$$\frac{2}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(z)}{s} A_\lambda(x) = -\sum_i \frac{s}{z-e_i}\left[\frac{s}{f'(e_i)(z-e_i)} + T_i(x)\right].$$

Nun ist

$$\sum_i \frac{1}{f'(e_i)(z-e_i)^2} = -\frac{d}{dz}\sum_i \frac{1}{f'(e_i)(z-e_i)} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{f'(z)}{f(z)^2},$$

also kommt

$$\frac{2}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(z)}{s} A_\lambda(x) = -\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_i \frac{s\,T_i(x)}{z-e_i}$$

und aus (20 a) wird

$$\text{(20 b)} \qquad \frac{d\Omega}{dz} = \frac{1}{2}\frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{i=0}^{2p+1}\frac{s\,T_i(x)}{z-e_i}.$$

Es ist demnach im Unendlichen, wenn wir die Entwicklung von $\frac{s}{z-e_i}$ in § 2 benutzen:

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{p+1}{z} \pm \Big[z^p\sum_i T_i(x) + z^{p-1}\sum_i \varphi_1(e_i)T_i(x) + \dots$$
$$+ \sum_i \varphi_p(e_i)T_i(x) + \frac{1}{z}\sum_i \varphi_{p+1}(e_i)T_i(x)\Big] + \Sigma_2.$$

Hier treten rechts Summen auf von der Gestalt $\sum_i \varphi_n(e_i)T_i(x)$.

Es sei nun $\psi(x)$ irgend eine ganze Funktion von z vom Grade $\leqq p+1$, so gilt der Satz:[1]

[1] Dieser Satz folgt sofort aus (9 a) in § 6, wenn wir bedenken, dass für jede derartige Funktion $\sum_i \frac{\Phi_\lambda(e_i)\psi(e_i)}{f'(e_i)} = 0$ ist. Diese Identität ergibt beiläufig für die Periodicitätsmoduln $a_{\mu\nu}$ gemäss (7) im vorigen Paragraphen die Differentialgleichungen:

$$\sum_i \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial e_i} = 0, \qquad \sum_i e_i\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial e_i} = 0, \qquad \sum_i e_i^2\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial e_i} = 0. \qquad (\mu,\nu = 1, 2, \dots, p)$$

$$\sum_i \psi(e_i) T_i(x) = -\frac{\psi(z)}{s}.$$

Wenden wir diese Gleichung auf die obigen Summen an, so erhalten wir

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix}: \qquad \frac{d\Omega}{dz} = \frac{p+1}{z} \mp \left[\frac{z^p}{s} + \frac{z^{p-1}\varphi_1(z)}{s} + \ldots + \frac{\varphi_p(z)}{s} + \frac{\varphi_{p+1}(z)}{zs}\right] + \Sigma_2.$$

Hier wird aber jedes Glied in der Klammer im Unendlichen gleich $\pm\frac{1}{z} + \Sigma_2$, also ist

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix}: \qquad \frac{d\Omega}{dz} = \frac{p+1}{z} - \frac{p+2}{z} + \Sigma_2 = -\frac{1}{z} + \Sigma_2$$

und daher

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_3\end{matrix}: \qquad \Omega = -\log z + \text{ fct. cont.}$$

Über das Verhalten von $\Omega(x)$ an den Querschnitten gibt uns die Gleichung (19) Aufschluss. Es folgt aus ihr, dass an irgend einem Querschnitt

$$2\frac{\partial}{\partial e_i}(\overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega}) = f'(e_i)(\overset{+}{T_i} + \overset{-}{T_i})(\overset{+}{T_i} - \overset{-}{T_i})$$

ist, also ist, infolge des am Ende des vorigen Paragraphen angegebenen Verhaltens von T_i an den Querschnitten:

$$\text{an } a_\mu: \qquad 2\frac{\partial}{\partial e_i}(\overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega}) = 0,$$

$$\text{an } b_\mu: \qquad 2\frac{\partial}{\partial e_i}(\overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega}) = 4\,\Phi_\mu(e_i)(\overset{+}{T_i} + \overset{-}{T_i}) = 4\frac{\partial}{\partial e_i}(\overset{+}{u}_\mu + \overset{-}{u}_\mu),$$

sodass wir erhalten

$$\text{an } a_\mu: \qquad \overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega} = c_\mu,$$

$$\text{an } b_\mu: \qquad \overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega} = 2(\overset{+}{u}_\mu + \overset{-}{u}_\mu) + d_\mu = 4u_\mu + 2a_{\mu\mu} + d_\mu,$$

wo die c_μ und d_μ von den Verzweigungspunkten unabhängige, also numerische Constanten sind, und zwar ganze Vielfache von $4\pi i$.

Ausserdem hat Ω constante Stetigkeitsunterbrechungen an Schnitten, die von einem beliebigen Punkte nach den logarithmischen Unstetigkeitspunkten, also den Verzweigungspunkten und den unendlich fernen Gebieten verlaufen.

Eine aufmerksame Betrachtung der hier abgeleiteten Eigenschaften der Funktion Ω, besonders ihres Verhaltens an den Querschnitten, weist auf eine enge Beziehung zwischen ihr und der hyperelliptischen Thetafunktion hin und in der That leistet sie für diese, was die Klein'sche Funktion $Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}$ für die Sigmafunktionen leistet,[1] indem sie die explicite Darstellung der Thetafunktion ermöglicht. Ein näheres Eingehen auf diesen Zusammenhang liegt ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit, wir wollen daher nur kurz im einfachsten Fall den Thatbestand angeben.

Die durch die Reihe

$$\vartheta((u_\mu - \eta_\mu)) = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{+\infty} e^{Q((m)) + 2\sum_{\mu=1}^{p} m_\mu (u_\mu - \eta_\mu)},$$

worin

$$Q((m)) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu,$$

definierte Funktion, wird, wenn nicht die Reihensumme identisch verschwindet, als Funktion von z zur ersten Ordnung null in p vereinigt oder getrennt liegenden Punkten

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$$

und wenn die mit den $2p$ ganzen Zahlen

$$g_1, g_2, \ldots, g_p, \qquad h_1, h_2, \ldots, h_p$$

gebildeten Simultanperioden symbolisch durch

$$(gh)_\mu = g_\mu \pi i + h_1 a_{1\mu} + h_2 a_{2\mu} + \ldots + h_p a_{p\mu}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

bezeichnet werden, so besteht zwischen den Nullpunkten und den Parametern $\eta_1, \ldots, \eta_p$ die Beziehung

$$\eta_\mu = \sum_\nu u_\mu(\varepsilon_\nu) + (g'h')_\mu - \frac{1}{2}(GH)_\mu. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

[1] vgl. Klein, Math. Ann. Bd. 32.

Hierin sind die $g'_1, g'_2, \dots, g'_p$, $h'_1, h'_2, \dots, h'_p$ ganze Zahlen, die von dem Verhalten von $\log\vartheta$ an den Querschnitten, die $G_1, \dots, G_p$, $H_1, \dots, H_p$ solche, die von dem Verhalten von $\log f(z)$ an den Querschnitten abhängen, und zwar derart, dass

$$\text{an } a_\mu\colon\quad \log\frac{\overset{+}{f}(z)}{\underset{-}{f}(z)} = 4H_\mu\pi i, \qquad\qquad \text{an } b_\mu\colon\quad \log\frac{\overset{+}{f}(z)}{\underset{-}{f}(z)} = -4G_\mu\pi i$$

ist. Bei dem von uns gewählten Querschnittsystem ist[1]

$$G_1 = 1,\quad G_2 = 2, \dots, G_p = p,$$

$$H_1 = 1,\quad H_2 = 1, \dots, H_p = 1.$$

Es mögen nun die Nullpunkte $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ sämtlich in Verzweigungspunkte

$$e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(p)}$$

fallen. Dann gestaltet sich der μ^{te} Parameter folgendermassen:

Man bilde die Funktion

$$A(z) = \sqrt{\overline{z - e^{(1)}}\,.\,\overline{z - e^{(2)}}\,.\dots.\,\overline{z - e^{(p)}}}$$

und bestimme $2p$ ganze Zahlen $g_1, \dots, g_p$, $h_1, \dots, h_p$ derart, dass

$$\text{an } a_\mu\colon\quad \log\frac{\overset{+}{A}(z)}{\underset{-}{A}(z)} = h_\mu\pi i, \qquad\qquad \text{an } b_\mu\colon\quad \log\frac{\overset{+}{A}(z)}{\underset{-}{A}(z)} = -g_\mu\pi i$$

ist, dann ist der μ^{te} Parameter

$$\eta_\mu = -\frac{1}{2}(G+g\,,\,H+h)_\mu + (g'h')_\mu$$

---

[1] Zum ersten Male treten diese Zahlen wohl in der Abhandlung von Herrn Prym, *Zur Theorie der Funktionen der zweiblättrigen Fläche*, 1866 (S. 35 Charakteristik (x)) auf, ohne freilich ausdrücklich genannt und bezeichnet zu werden, doch haben sie dort wegen des anderen Querschnittsystems entsprechend andere Werte.

und die in den p Verzweigungspunkten verschwindende Thetafunktion ist, abgesehen von einem nirgends verschwindenden Exponentialfaktor

$$\vartheta\left|\begin{matrix} H+h \\ G+g \end{matrix}\right|((u_\mu)) = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{Q\left(\left(m+\frac{H+h}{2}\right)\right) + 2\sum_\mu \left(m_\mu + \frac{H_\mu + h_\mu}{2}\right)\left(u_\mu + \pi i \frac{G_\mu + g_\mu}{2}\right)},$$

und *diese Thetafunktion nun wird mittels der Funktion Ω durch die Gleichung*

$$\vartheta\left|\begin{matrix} H+h \\ G+g \end{matrix}\right|((u_\mu)) = c\,\frac{A(z)}{\sqrt[4]{f'(z)}}\,e^{-\frac{1}{2}\Omega}$$

dargestellt, worin c von z unabhängig ist.

Strassburg i. E., September 1894.

LA MÉTHODE DE NEUMANN ET LE PROBLÈME DE DIRICHLET

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

Introduction.

§ 1. *Simple et double couche.*

Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction V qui à l'intérieur d'un certain domaine reste finie et continue ainsi que ses dérivées, et satisfait de plus à l'équation de Laplace

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

et qui sur la frontière de ce domaine prenne des valeurs données à l'avance.

Si le domaine s'étend à l'infini, cette fonction V devra de plus s'annuler à l'infini.

Dans ce qui suivra je désignerai sous le nom de *fonction harmonique* toute fonction finie et continue ainsi que ses dérivées, satisfaisant à l'équation de Laplace et s'annulant à l'infini, de sorte que le problème de Dirichlet peut s'énoncer ainsi:

Trouver une fonction harmonique dans un certain domaine prenant des valeurs données sur la frontière de ce domaine.

Parmi les méthodes qui donnent la solution de ce problème, nous distinguerons celle de Neumann qui est fondée sur les propriétés des doubles couches.

Considérons une surface S que je supposerai fermée. Supposons d'abord une certaine quantité de matière attirante répandue sur cette surface; son potentiel au point x, y, z aura pour expression:

$$W = \int \frac{\mu' d\omega'}{r}$$

où $d\omega'$ est un élément de la surface S ayant pour centre de gravité x', y', z'; où μ' est la densité de la matière attirante de telle sorte que la quantité de matière attirante contenue dans l'élément $d\omega'$ soit égale à $\mu' d\omega'$; enfin r est la distance des points x, y, z et x', y', z'.

C'est ce qu'on appelle le potentiel d'une simple couche.

Ce potentiel W est harmonique dans tout l'espace sauf sur la surface S; quand on franchit S, W est continu, mais ses dérivées ne le sont pas.

Je représenterai par $\frac{dW}{dn}$ la dérivée de W estimée suivant la normale de sorte que

$$\frac{dW}{dn} = \alpha \frac{dW}{dx} + \beta \frac{dW}{dy} + \gamma \frac{dW}{dz},$$

α, β et γ étant les cosinus directeurs de la normale *extérieure* à la surface S.

Je désignerai par V la valeur du potentiel W en un point intérieur à S mais très voisin de S et par V' sa valeur en un point extérieur à S et très voisin de S. La fonction W étant continue, on aura sur S

$$V = V'.$$

De même nous distinguerons la valeur de $\frac{dW}{dn}$ en un point très voisin de x', y', z', et intérieur à S; nous l'appellerons $\frac{dV}{dn}$.

Nous distinguerons d'autre part la valeur de $\frac{dW}{dn}$ en un point très voisin de x', y', z' et extérieur à S; nous l'appellerons $\frac{dV'}{dn}$. On a alors:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV'}{dn} + 4\pi\mu'.$$

Telles sont les propriétés bien connues du potentiel d'une simple couche.

Soit maintenant:

$$W = \int \mu' d\sigma';$$

$d\sigma'$ est l'angle solide sous lequel l'élément $d\omega'$ est vu du point x, y, z, cet angle solide étant regardé comme positif quand l'élément $d\omega'$ est vu par le côté interne. Quant à μ' c'est une certaine fonction de x', y', z' que l'on appelle la densité de la double couche.

On dit alors que W est le potentiel d'une double couche et cette expression est justifiée parce qu'on peut le regarder comme le potentiel dû à deux couches attirantes infiniment rapprochées l'une de l'autre et telle qu'en deux points correspondants de ces deux couches les densités soient égales et de signe contraire et d'ailleurs très grandes.

Nous conserverons aux notations V, V', $\frac{dV}{dn}$, $\frac{dV'}{dn}$ le même sens que plus haut et nous verrons alors que le potentiel W jouit des propriétés suivantes:

1° W est harmonique dans tout l'espace sauf sur la surface S.

2° On a sur la surface S:

$$V = V' + 4\pi\mu', \qquad \frac{dV}{dn} = \frac{dV'}{dn}.$$

On voit qu'il y a un remarquable contraste entre les propriétés de la simple couche et celles de la double couche, dans un cas c'est W qui est continue, et dans l'autre c'est $\frac{dW}{dn}$.

§ 2. *Méthode de Neumann.*

Soit Φ une fonction donnée en tous les points de la surface S; soit λ un paramètre auquel je me réserve de donner différentes valeurs.

Proposons-nous de trouver une double couche dont le potentiel W satisfasse à la condition suivante:

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi; \tag{1}$$

c'est ce que j'appellerai le *problème de Neumann.*

Si dans l'équation (1) on fait $\lambda = -1$; elle se réduit à

$$V = \Phi.$$

A l'intérieur de la surface S, le potentiel W est une fonction harmo-

nique, et la limite de cette fonction, quand on se rapproche de la surface S est la fonction donnée Φ.

Faisons maintenant $\lambda = 1$, l'équation (1) deviendra:

$$V' = -\Phi.$$

A l'extérieur de S, la fonction W est harmonique et sa limite quand on se rapproche de la surface S est la fonction donnée $-\Phi$.

Le problème de Dirichlet, soit pour un domaine intérieur à S, soit pour un domaine extérieur à S n'est donc qu'un cas particulier du problème de Neumann.

Cela posé, on peut résoudre le problème de Neumann par des séries procédant suivant les puissances croissantes de λ. Soit

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots \tag{2}$$

et de même:

$$V = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \dots,$$

$$V' = V'_0 + \lambda V'_1 + \lambda^2 V'_2 + \dots.$$

Soit enfin:

$$V + V' = 2U, \qquad V_i + V'_i = 2U_i.$$

En égalant dans l'équation (1) les coëfficients des puissances semblables de λ il viendra:

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} V_0 - V'_0 &= 2\Phi, \\ V_1 - V'_1 &= V_0 + V'_0 = 2U_0, \\ V_2 - V'_2 &= V_1 + V'_1 = 2U_1, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

cela montre que W_0 est le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{\Phi}{2\pi}$; que W_1 est le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{U_0}{2\pi}$; que W_2 est le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{U_1}{2\pi}$, etc.

On peut donc calculer successivement les différents termes de la série (2). Il reste à savoir si cette série est convergente.

Dans le cas où la surface S est convexe, Neumann a démontré cette convergence, ou plutôt il a montré qu'on peut toujours trouver une constante C telle que la série:

$$(2') \qquad (W_0 - C) + \lambda(W_1 - C) + \lambda^2(W_2 - C) + \ldots$$

converge pour toutes les valeurs de λ telles que $|\lambda| \leq 1$.

Soit G_i la plus grande et H_i la plus petite valeur de U_i; il est clair d'abord que:

$$(3) \qquad G_i > G_{i+1} > H_{i+1} > H_i.$$

Neumann montre de plus que:

$$G_{i+1} - H_{i+1} < \alpha(G_i - H_i),$$

α étant une constante plus petite que 1 qui ne dépend que de la configuration de la surface S.

Il est aisé d'en conclure que l'on peut déterminer la constante C de façon que la série (2′) converge.

La méthode de Neumann est-elle encore applicable quand la surface S n'est pas convexe?

On pourrait d'abord être tenté de répondre négativement. Les inégalités (3) qui semblent jouer un rôle essentiel ne sont plus vraies en effet quand la surface cesse d'être convexe.

Soit $N+1$ le maximum du nombre des points d'intersection d'une droite quelconque avec la surface fermée S. Ce nombre N, qui a une certaine importance, est égal à 1 dans le cas d'une surface convexe. Cela posé, nous avons:

$$U_{i+1} = \int \frac{U'_i d\sigma}{2\pi};$$

U_{i+1} est la valeur de la fonction W_{i+1} en un point x, y, z situé sur la surface S elle-même; (laquelle valeur, d'après une propriété bien connue de la double couche est moyenne arithmétique entre les limites V_{i+1} et V'_{i+1} vers lesquelles tend W_{i+1} quand on se rapproche du point x, y, z, soit par l'intérieur, soit par l'extérieur).

$d\omega'$ est un élément de la surface S ayant pour centre de gravité

x', y', z'; U'_i c'est la valeur de la fonction U_i au point x', y', z'; enfin $d\sigma'$ est l'angle solide sous lequel $d\omega'$ est vu du point x, y, z.

Soit M_i la plus grande valeur de $|U_i|$, c'est à dire la plus grande des deux quantités $|G_i|$ et $|H_i|$; on aura évidemment

$$M_{i+1} < M_i \int \frac{|d\sigma'|}{2\pi} < NM_i$$

d'où:

$$(4) \qquad |G_i| < M_0 N^i; \qquad |H_i| < M_0 N^i; \qquad |U_i| < M_0 N^i;$$

M_0 étant une constante; nous nous servirons des inégalités (4) dans la suite; mais on voit tout de suite qu'elles ne sauraient remplacer les inégalités (3) et on peut être porté à croire que la série (2') ne converge plus.

Contrairement à ces prévisions, *la méthode de Neumann est encore applicable quand même la surface S n'est pas convexe.*

Etablir ce point est le but du présent travail.

CHAPITRE I.

Les intégrales J_m.

§ 1. *Définition des intégrales J_m.*

Considérons l'intégrale:

$$J_{i,k} = \int \left(\frac{dW_i}{dx} \frac{dW_k}{dx} + \frac{dW_i}{dy} \frac{dW_k}{dy} + \frac{dW_i}{dz} \frac{dW_k}{dz} \right) d\tau,$$

étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine intérieur à S.

Considérons de même l'intégrale:

$$J'_{i,k} = \int \left(\frac{dW_i}{dx} \frac{dW_k}{dx} + \frac{dW_i}{dy} \frac{dW_k}{dy} + \frac{dW_i}{dz} \frac{dW_k}{dz} \right) d\tau,$$

étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine extérieur à S.

Il résulte de cette définition que

$$J_{i.k} = J_{k.i}, \qquad J'_{i.k} = J'_{k.i}.$$

D'autre part le théorème de Green nous apprend que:

$$J_{i.k} = \int V_i \frac{dV_k}{dn} d\omega = \int V_k \frac{dV_i}{dn} d\omega$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface S. De même:

$$J'_{i.k} = -\int V'_i \frac{dV'_k}{dn} d\omega = -\int V'_i \frac{dV_k}{dn} d\omega = -\int V'_k \frac{dV_i}{dn} d\omega.$$

Reprenons l'équation

$$V_m - V'_m = V_{m-1} + V'_{m-1}$$

qui est l'une des équations (A) du paragraphe précédent.

Multiplions la par $\frac{dV_p}{dn} d\omega$ et intégrons; il viendra:

$$(1) \qquad J_{m.p} + J'_{m.p} = J_{m-1.p} - J'_{m-1.p}.$$

On aura de même

$$J_{p+1.m-1} + J'_{p+1.m-1} = J_{p.m-1} - J'_{p.m-1},$$

ou en permutant les indices, ce qui est permis,

$$J_{m-1.p+1} + J'_{m-1.p+1} = J_{m-1.p} - J'_{m-1.p}$$

d'où:

$$(2) \qquad J_{m.p} + J'_{m.p} = J_{m-1.p+1} + J'_{m-1.p+1}.$$

D'autre part:

$$J_{m-1.p+1} + J'_{m-1.p+1} = J_{m-2.p+1} - J'_{m-2.p+1}$$

d'où:

$$J_{m-1.p} - J'_{m-1.p} = J_{m-2.p+1} - J'_{m-2.p+1}$$

ou en changeant m en $(m + 1)$

$$(3) \qquad J_{m.p} - J'_{m.p} = J_{m-1.p+1} - J'_{m-1.p+1}$$

La comparaison des équations (2) et (3) nous donne:

$$J_{m,p} = J_{m-1,p+1} = J_{m-2,p+2} = \ldots = J_{0,m+p},$$

$$J'_{m,p} = J'_{m-1,p+1} = J'_{m-2,p+2} = \ldots = J'_{0,m+p}.$$

On voit donc que les intégrales J et J' *ne dépendent que de la somme* des deux indices m et p, ce qui nous permet de simplifier la notation en écrivant:

$$J_{m,p} = J_{m+p}$$

avec un seul indice. Avec cette nouvelle notation l'équation (1) devient:

$$(4) \qquad J_m + J'_m = J_{m-1} - J'_{m-1}.$$

§ 2. *Propriétés des intégrales J_m.*

D'après la définition de l'intégrale $J_{i,k}$, cette intégrale doit être positive quand les deux indices sont égaux puisque la quantité sous le signe $\int$ devient une somme de carrés. Il en est de même pour l'intégrale $J'_{i,k}$.

On a donc:

$$J_{m,m} > 0, \qquad J'_{m,m} > 0$$

ou (avec la nouvelle notation à un seul indice)

$$J_{2m} > 0, \qquad J'_{2m} > 0.$$

Les intégrales d'indice pair sont donc essentiellement positives; il peut n'en être pas de même des intégrales d'indice impair.

Supposons que dans la série d'équations qui définissent les fonctions W_0, W_1, etc.; on change Φ en $\alpha\Phi + \beta U_{q-1}$, α et β étant deux constantes quelconques; qu'arrivera-t-il?

W_0 se changera en $\alpha W_0 + \beta W_q$; V_0 en $\alpha V_0 + \beta V_q$; V'_0 en $\alpha V'_0 + \beta V'_q$; U_0 en $\alpha U_0 + \beta U_q$; etc. et en général W_i en $\alpha W_i + \beta W_{i+q}$.

L'intégrale

$$J_{i+k} = \int V_i \frac{dV_k}{dn} d\omega$$

se changera en

$$\int \left(\alpha V_i + \beta V_{i+q}\right)\left(\alpha \frac{dV_k}{dn} + \beta \frac{dV_{k+q}}{dn}\right) d\omega,$$

c'est à dire en:

$$\alpha^2 J_{i+k} + 2\alpha\beta J_{i+k+q} + \beta^2 J_{i+k+2q}.$$

Si l'indice $i + k$ est pair et égal à $2m$, J_{2m} se changera en:

$$(1) \qquad \alpha^2 J_{2m} + 2\alpha\beta J_{2m+q} + \beta^2 J_{2m+2q},$$

de sorte que l'expression (1) devra être positive.

De même J'_{2m} se changera en

$$(2) \qquad \alpha^2 J'_{2m} + 2\alpha\beta J'_{2m+q} + \beta^2 J'_{2m+2q}$$

de sorte que l'expression (2) devra aussi être positive. L'expression (1) étant positive quels que soient α et β, sera une forme quadratique définie positive en α et β.

On aura donc:

$$(3) \qquad J^2_{2m+q} < J_{2m} J_{2m+2q}.$$

De même l'expression (2) étant toujours positive, ainsi que la somme de (1) et de (2) on aura:

$$J'^2_{2m+q} < J'_{2m} J'_{2m+2q},$$

$$(J_{2m+q} + J'_{2m+q})^2 < (J_{2m} + J'_{2m})(J_{2m+2q} + J'_{2m+2q}).$$

En faisant $q = 2$ et remarquant que les J d'indice pair sont positifs, on trouve:

$$(4) \qquad \frac{J_{2m+2}}{J_{2m}} < \frac{J_{2m+4}}{J_{2m+2}}; \qquad \frac{J'_{2m+2}}{J'_{2m}} < \frac{J'_{2m+4}}{J'_{2m+2}}.$$

En faisant $q = 1$, on trouve:

$$(5) \qquad \frac{|J_{2m+1}|}{J_{2m}} < \frac{J_{2m+2}}{|J_{2m+1}|}; \qquad \frac{|J'_{2m+1}|}{J'_{2m}} < \frac{J'_{2m+2}}{|J'_{2m+1}|}.$$

Pour aller plus loin, partons de l'inégalité:

$$\alpha^2 J_{2m} + 2\alpha\beta J_{2m+1} + \beta^2 J_{2m+2} > 0.$$

Les deux équations

$$J_{2m+2} + J'_{2m+2} = J_{2m+1} - J'_{2m+1},$$

$$J_{2m} - J'_{2m} = J_{2m+1} + J'_{2m+1}$$

nous donnent:

$$2J_{2m+1} = (J_{2m} + J_{2m+2}) - (J'_{2m} - J'_{2m+2}).$$

L'inégalité

$$4J^2_{2m+1} - 4J_{2m}J_{2m+2} < 0$$

devient alors:

$$(J_{2m} + J_{2m+2})^2 + (J'_{2m} - J'_{2m+2})^2 - 4J_{2m}J_{2m+2}$$

$$- 2(J_{2m} + J_{2m+2})(J'_{2m} - J'_{2m+2}) < 0.$$

Or:

$$(J_{2m} + J_{2m+2})^2 - 4J_{2m}J_{2m+2} = (J_{2m} - J_{2m+2})^2 > 0.$$

$$(J'_{2m} - J'_{2m+2})^2 > 0$$

on a donc à fortiori:

$$2(J_{2m} + J_{2m+2})(J'_{2m} - J'_{2m+2}) > 0,$$

et puisque

$$J_{2m} > 0, \qquad J_{2m+2} > 0$$

on en conclut:

(6) $$J'_{2m} > J'_{2m+2}.$$

De même on a:

$$4J'^2_{2m+1} - 4J'_{2m}J'_{2m+2} < 0,$$

$$2J'_{2m+1} = -(J'_{2m} + J'_{2m+2}) + (J_{2m} - J_{2m+2})$$

d'où:

$$(J'_{2m} + J'_{2m+2})^2 + (J_{2m} - J_{2m+2})^2 - 4J'_{2m}J'_{2m+2}$$

$$- 2(J'_{2m} + J'_{2m+2})(J_{2m} - J_{2m+2}) < 0.$$

d'où à fortiori

$$2(J'_{2m} + J'_{2m+2})(J_{2m} - J_{2m+2}) > 0.$$

d'où enfin:

(6') $$J_{2m} > J_{2m+2}.$$

Nous pouvons donc résumer ces premiers résultats dans les formules suivantes:

$$\frac{J_2}{J_0} < \frac{J_4}{J_2} < \frac{J_6}{J_4} < \ldots < 1,$$

(7) $$\frac{J'_2}{J'_0} < \frac{J'_4}{J'_2} < \frac{J'_6}{J'_4} < \ldots < 1,$$

$$\frac{J_2 + J'_2}{J_0 + J'_0} < \frac{J_4 + J'_4}{J_2 + J'_2} < \ldots < 1.$$

D'autre part la comparaison des formules (5), (6) et (6') nous donne:

(8) $$|J_{2m+1}| < J_{2m}, \qquad |J'_{2m+1}| < J'_{2m}.$$

CHAPITRE II.

Etude du rapport $\frac{J}{J'}$.

§ 1. *Enoncé du problème.*

Soit W le potentiel d'une simple ou d'une double couche répandue sur la surface S; considérons les deux intégrales:

$$J = \int \left(\frac{dW^2}{dx^2} + \frac{dW^2}{dy^2} + \frac{dW^2}{dz^2}\right) d\tau$$

étendue à l'intérieur de S; et

$$J' = \int \left(\frac{dW^2}{dx^2} + \frac{dW^2}{dy^2} + \frac{dW^2}{dz^2}\right) d\tau$$

étendue à l'extérieur de S.

L'intégrale J' ne peut s'annuler que si W est constant à l'extérieur de S; et comme W est nul à l'infini, cela ne peut arriver que si W est identiquement nul à l'extérieur de S. Dans le cas de la simple couche, il faut pour cela que W soit identiquement nul; car on a alors:

$$V = V' = 0$$

et par conséquent $W = 0$ à l'intérieur de S. Dans le cas de la double couche, il faut pour cela que la densité de la double couche soit constante, et W constant à l'intérieur de S. Dans l'un et l'autre cas on aura:

$$J = 0.$$

Ainsi J' ne peut s'annuler sans que J s'annule.

D'autre part l'intégrale J ne peut s'annuler que si W est constant à l'intérieur de S. Cela arrive dans le cas de la double couche si la densité de cette double couche est constante ce qui entraîne pour conséquences:

$$W = 0 \text{ à l'extérieur de } S$$

et

$$J' = 0.$$

Cela arrive d'autre part, dans le cas de la simple couche, si la densité de cette simple couche est proportionnelle à celle que prendrait une charge électrique en équilibre sur la surface S regardée comme conductrice. On aura alors en général

$$J' > 0.$$

En résumé le rapport $\frac{J}{J'}$ est essentiellement positif; dans le cas de la double couche, il ne peut ni s'annuler, ni devenir infini; dans le cas de la simple couche, il peut s'annuler, mais il ne peut pas devenir infini.

Soient maintenant

$$W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_p$$

p potentiels qui seront tous dus, soit à une simple couche, soit à une double couche répandue sur la surface S.

Soit maintenant

$$W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_p W_p, \tag{1}$$

les α étant des constantes arbitraires.

J et J' seront alors des polynômes entiers et homogènes du second degré par rapport aux indéterminées α, de telle façon que le rapport $\frac{J}{J'}$ sera une fonction homogène de degré o de ces indéterminées α.

J et J' sont des formes quadratiques par rapport aux α et ces formes sont définies positives. Quand donc on fera varier les α sans changer $W_1, W_2, \ldots, W_p$, le rapport $\frac{J}{J'}$ aura un maximum R_1 et un minimum R_2.

Je suppose bien entendu qu'il n'y a entre les W_i aucune relation linéaire à coëfficients constants.

Alors même dans le cas de la simple couche, le maximum R_1 ne peut s'annuler. En effet pour que R_1 fût nul, il faudrait que J restât nul quels que soient les α, c'est à dire que $W_1, W_2, \ldots, W_p$ demeurassent constants à l'intérieur de S. Mais alors le rapport $\frac{W_2}{W_1}$ se réduisait à une constante tant à l'extérieur qu'à l'intérieur de S et cela est impossible puisqu'il ne doit y avoir entre les W_i aucune relation linéaire.

Cela posé, le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant:

Trouver dans le cas de la double couche une limite supérieure et une limite inférieure du rapport $\frac{J}{J'}$.

Trouver dans le cas de la simple couche une limite supérieure de ce rapport.

Trouver dans les deux cas une limite supérieure de R_2 et une limite inférieure de R_1.

Est-il possible de trouver ces limites, les limites supérieures étant bien entendu finies, et les limites inférieures positives et différentes de o?

Les aperçus qui précèdent peuvent rendre la chose vraisemblable, mais non l'établir rigoureusement. La démonstration rigoureuse sera l'objet du présent chapitre.

§ 2. *Comparaison des cas de la simple et de la double couche.*

Soient W_1 et W_2 deux potentiels dûs le premier à une simple couche, le second à une double couche.

Je désignerai par V_1, V'_1, J_1, J'_1 et par V_2, V'_2, J_2, J'_2 les valeurs de V, V', J, J' correspondant respectivement à W_1 et à W_2. On aura donc:

$$J_1 = \int V_1 \frac{dV_1}{dn} d\omega, \qquad J'_1 = -\int V'_1 \frac{dV'_1}{dn} d\omega,$$

$$J_2 = \int V_2 \frac{dV_2}{dn} d\omega, \qquad J'_1 = -\int V'_2 \frac{dV'_2}{dn} d\omega,$$

$$V_2 = V'_2, \qquad \frac{dV_2}{dn} = \frac{dV'_2}{dn}.$$

Je désignerai par K l'intégrale

$$\int \left(\frac{dW_1}{dx}\frac{dW_2}{dx} + \frac{dW_1}{dy}\frac{dW_2}{dy} + \frac{dW_1}{dz}\frac{dW_2}{dz}\right) d\tau$$

étendue à l'intérieur de S et par K' la même intégrale étendue à l'extérieur de S.

On aura donc:

$$K = \int V_1 \frac{dV_2}{dn} d\omega = \int V_2 \frac{dV_1}{dn} d\omega,$$

$$K' = -\int V'_1 \frac{dV'_2}{dn} d\omega = -\int V'_2 \frac{dV'_1}{dn} d\omega$$

et si l'on observe que $V'_1 = V_1$, $\frac{dV'_2}{dn} = \frac{dV_2}{dn}$, on en conclura que [1]

$$K = -K'.$$

On connait l'inégalité de LAGRANGE:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 < (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

[1] Il peut arriver que l'on sache que la fonction W_1 est harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de S et tend uniformément vers une même limite $V_1 = V'_1$ quand on se rapproche de S; mais qu'on ne sache pas si $\frac{dV_1}{dn}$, $\frac{dV'_1}{dn}$ ont des valeurs finies et déterminées. On ne peut alors affirmer que W_1 soit effectivement le potentiel d'une simple couche. Le théorème n'en est pas moins applicable.

On en déduit l'inégalité de SCHWARZ

$$\left[\int \varphi\psi d\tau\right]^2 < \int \varphi^2 d\tau \int \psi^2 d\tau.$$

On pourrait en déduire également:

$$\left[\int \sum \frac{dW_1}{dx}\frac{dW_2}{dx} d\tau\right]^2 < \int \sum \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 d\tau \int \sum \left(\frac{dW_2}{dx}\right)^2 d\tau.$$

En étendant les intégrations à l'intérieur de S cela peut s'écrire:

(1) $$K^2 < J_1 J_2,$$

et en les étendant à l'extérieur de S

(2) $$K'^2 < J'_1 J'_2.$$

Si nous supposons que l'on a $V_2 = V_1$, on aura $W_1 = W_2$ à l'intérieur de S et par conséquent:

$$J_1 = J_2 = K$$

d'où:

$$K'^2 = K^2 = J_1^2 = J_2^2 = J_1 J_2.$$

L'inégalité (2) devient alors:

(2') $$\frac{J_1}{J'_1} < \frac{J'_2}{J_2}.$$

Si nous supposons que l'on a $V'_2 = V'_1$, on aura $W_1 = W_2$ à l'extérieur de S et par conséquent

$$J'_1 = J'_2 = K'$$

d'où:

$$K^2 = K'^2 = J_1'^2 = J_2'^2 = J'_1 J'_2.$$

L'inégalité (1) devient alors

(1') $$\frac{J'_1}{J_1} < \frac{J_2}{J'_2}.$$

Etant donnée une double couche quelconque dont le potentiel est égal à W_2, on peut toujours trouver une simple couche dont le potentiel W_1 soit égal à W_2 à l'intérieur de S (ou bien à l'extérieur de S).

Etant donnée une simple couche dont le potentiel est W_1, on peut trouver une double couche dont le potentiel W_2 soit égal à W_1 à l'intérieur de S.

On ne peut pas en général trouver une double couche dont le potentiel W_2 soit égal à W_1 à l'extérieur de S; mais on peut en trouver une telle que l'on ait en tout point infiniment voisin de S mais extérieur à S:

$$W_2 = W_1 + \text{const.}$$

c'est à dire

$$V_2' = V_1' + \text{const.}$$

Après avoir énoncé ces propositions voyons dans quelle mesure elles peuvent être regardées comme démontrées.

La première peut être rigoureusement démontrée. La méthode de Schwarz, la méthode du balayage, et en général les méthodes autres que celle de Neumann, permettent de démontrer le principe de Dirichlet pour une surface quelconque, convexe ou non convexe.

Il existera donc une fonction W_3, harmonique à l'extérieur de S et se réduisant à V_2 sur la surface S (ce qui s'écrit $V_3' = V_2$).

Définissons alors W_1 de la manière suivante:

$$W_1 = W_2 \text{ à l'intérieur de } S,$$

$$W_1 = W_3 \text{ à l'extérieur de } S.$$

On aura alors

$$V_1 = V_2; \qquad V_1' = V_3' = V_2; \quad \text{d'où} \quad V_1 = V_1'.$$

W_1 est donc bien le potentiel d'une simple couche et se réduit à W_2 à l'intérieur de S.

On démontrerait de même qu'on peut trouver une simple couche telle que $W_1 = W_2$ à l'extérieur de S.

Passons au second problème, où l'on se donne W_1 et où on se propose de déterminer la double couche qui engendre W_2 de telle façon que $W_2 = W_1$ à l'intérieur de S ou que $V_2' = V_1' + \text{const.}$

Les deux propositions relatives à ce problème ne peuvent être regardées comme démontrées que dans le cas où la méthode de Neumann et applicable, c'est à dire, jusqu'à nouvel ordre, pour les surfaces convexes seulement.

Soient M_1 et m_1 la limite supérieure et la limite inférieure du rapport $\frac{J_1}{J'_1}$; soient M'_1 et m'_1 la limite supérieure et la limite inférieure du rapport $\frac{J_2}{J'_2}$.

Supposons maintenant que nous considérions p simples couches ayant respectivement pour potentiels

$$W_1^1, W_2^1, \ldots, W_p^1$$

et soit, comme dans le paragraphe précédent

$$W_1 = \alpha_1 W_1^1 + \alpha_2 W_2^1 + \ldots + \alpha_p W_p^1,$$

les α étant des constantes indéterminées.

Le rapport $\frac{J_1}{J'_1}$ quand nous ferons varier les α sans toucher aux W_i^1, aura un maximum R_1 et un minimum R_2. (J'observe en passant que R_1 et R_2 ne changeront pas quand on remplacera les W_i^1 par p combinaisons linéaires quelconques des W_i^1.)

Nous pouvons maintenant faire varier la densité des p simples couches qui engendrent les potentiels W_i^1; on voit alors que R_1 aura une limite inférieure m_p et R_2 une limite supérieure M_p.

Considérons de même p doubles couches ayant pour potentiels

$$W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2$$

et soit:

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \alpha_2 W_2^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2.$$

Le rapport $\frac{J_2}{J'_2}$ quand on fera varier les α aura un maximum R'_1 et un minimum R'_2. Si on fait ensuite varier la densité des p doubles couches, R'_1 aura une limite inférieure m'_p et R'_2 une limite supérieure M'_p.

Les nombres m_p, M_p, m'_p, M'_p dépendent évidemment du nombre p, et il est clair qu'ils ne dépendent que de ce nombre p et de la surface S.

On aura d'ailleurs:

$$m_1 = 0, \qquad m_1 < m_2 < m_3 < \ldots.$$

$$M_1 > M_2 > M_3 > \ldots.$$

On voit aisément que $m_1 = 0$. Dans le cas de $p = 1$, on a en effet simplement

$$W_1 = \alpha_1 W_1^1.$$

Pour que $R_1 = R_2$ atteigne sa limite inférieure, il suffit de donner à la simple couche qui engendre W_1^1 une densité proportionnelle à celle que prendrait l'électricité en équilibre sur la surface S supposée conductrice.

On aurait alors $W_1^1 = \text{const.}$ à l'intérieur de S et par conséquent

$$J_1 = 0, \qquad J_1' > 0$$

et enfin

$$\frac{J_1}{J_1'} = R_1 = R_2 = 0$$

d'où

$$m_1 = 0.$$

On trouverait des inégalités analogues dans le cas de la double couche, à savoir:

$$m_1' < m_2' < m_3' < \ldots,$$

$$M_1' > M_2' > M_3' > \ldots.$$

Mais avant d'aller plus loin une remarque est nécessaire au sujet de la définition des nombres m_p' et M_p'. Supposons que W_2 soit un potentiel engendré par une double couche de densité constante; W_2 sera constant à l'intérieur de S et nul à l'extérieur de S. On aura donc

$$J_2 = J_2' = 0$$

de sorte que le rapport $\frac{J_2}{J_2'}$ se présente dans ce cas sous une forme indéterminée. Soit maintenant de nouveau:

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \alpha_2 W_2^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2$$

et supposons que W_1^2 soit engendré par une double couche de densité constante. On aura alors tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S

$$\frac{dW_1^2}{dx} = \frac{dW_1^2}{dy} = \frac{dW_1^2}{dz} = 0,$$

ce qui prouve que ni les dérivées de W_2 par rapport à x, y, z, ni par conséquent J_2 et J'_2 ne peuvent dépendre de α_1.

Il résulte de là que les valeurs de R'_1 et de R'_2 correspondant aux p potentiels

$$W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2$$

ne diffèrent pas des valeurs de R'_1 et de R'_2 correspondant aux $p - 1$ potentiels

$$W_2^2, W_3^2, \ldots, W_p^2.$$

Soit encore

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \alpha_2 W_2^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2$$

mais ne supposons plus que W_1^2 soit engendré par une double couche de densité constante. Désignons d'autre part par W_0^2 un potentiel engendré par une double couche de densité constante.

Choisissons

$$W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2$$

de telle façon que R'_1 atteigne sa limite inférieure m'_p; je dis qu'on peut toujours supposer

$$W_1^2 = W_0^2.$$

En effet s'il n'en était pas ainsi, nous pourrions observer que le R'_1 relatif aux p potentiels

$$W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2$$

ne peut être plus petit que le R'_1 relatif aux $p - 1$ potentiels

$$W_2^2, \ldots, W_p^2$$

lequel est égal au R'_1 relatif aux p potentiels

$$W_0^2, W_2^2, \ldots, W_p^2.$$

En remplaçant W_1^2 par W_0^2 on n'a donc pu augmenter R'_1 qui est resté égal à sa limite inférieure m'_p.

De même si nous choisissons les W_i^2 de telle façon que R'_2 atteigne sa limite supérieure M'_p, nous pourrons toujours supposer que ce choix a été fait de telle façon que

$$W_1^2 = W_0^2,$$

car on pourrait toujours remplacer W_1^2 par W_0^2 sans que R_2' cesse d'être égal à sa limite supérieure.

Ce raisonnement suppose, il est vrai, qu'il n'y a pas de relation linéaire entre

$$W_0^2, W_2^2, \ldots, W_p^2,$$

mais s'il y en avait une, on remplacerait W_2^2 par W_1^2 par exemple et il ne saurait alors y avoir de relation linéaire entre

$$W_0^2, W_1^2, W_3^2, W_4^2, \ldots, W_p^2$$

puisqu'il n'y en a pas par hypothèse entre

$$W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2.$$

Il résulte encore de là que

$$m_2' < \frac{J_2}{J_2'} < M_2'.$$

Prenons d'abord p simples couches ayant pour potentiels

$$(3) \qquad W_1^1, W_2^1, \ldots, W_p^1$$

et p doubles couches ayant pour potentiels

$$(4) \qquad W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2$$

et soit

$$W_1 = \alpha_1 W_1^1 + \ldots + \alpha_p W_p^1,$$

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2.$$

Formons les rapports $\frac{J_1}{J_1'}, \frac{J_2}{J_2'}$, leurs maxima R_1 et R_1' et leurs minima R_2 et R_2'.

Cela posé, choisissons d'abord les W_i^2 de telle façon que R_2' atteigne sa limite supérieure M_p'; nous pourrons alors supposer

$$W_2 = W_1^2,$$

ce qui montre qu'on aura

$$W_1^2 = \text{const.}$$

à l'intérieur de S. Nous pourrons ensuite trouver p simples couches dont les potentiels W_i^1 satisfassent *à l'intérieur de S* à la condition

$$W_i^1 = W_i^2.$$

Cela nous montre en passant que la simple couche qui engendre W_1^1 a sa densité proportionnelle à celle de l'électricité en équilibre.

Il viendra alors:

$$\frac{J_1}{J_1'} < \frac{J_2'}{J_2}$$

d'où:

$$R_1 < \frac{1}{R_2'};$$

or

$$R_2' = M_p', \qquad m_p < R_1$$

d'où:

(6) $$m_p \leq \frac{1}{M_p'}.$$

Choisissons maintenant les W_i^1 de telle façon que R_2 atteigne sa limite supérieure M_p. On pourra *au moins si S est convexe* trouver p doubles couches telles qu'à l'intérieur de S on ait

$$W_i^2 = W_i^1.$$

On aura encore:

$$\frac{J_1}{J_1'} < \frac{J_2'}{J_2}$$

d'où:

$$R_2 < \frac{1}{R_1'}.$$

Or

$$R_1 = M_p; \qquad R_1' > m_p'$$

d'où:

(7) $$M_p < \frac{1}{m_p'}.$$

Choisissons maintenant les W_i^2 de telle façon que R_1' atteigne sa limite

m'_p; nous pourrons trouver p simples couches telles que l'on ait *à l'extérieur de S*

$$W_i^1 = W_i^2.$$

On aura alors:

$$\frac{J_1}{J'_1} > \frac{J'_2}{J_2}$$

d'où:

$$R_2 > \frac{1}{R'_1};$$

or

$$R'_1 = m'_p, \qquad R_2 < M_p$$

d'où:

(8) $$m'_p \geqq \frac{1}{M_p}.$$

Si la surface S est convexe les relations (6), (7), (8), sont vraies à la fois et on en conclut:

$$M_p = \frac{1}{m_p}.$$

Si la surface S n'est pas convexe les relations (6) et (8) sont encore vraies, mais les relations (7) ne peuvent être regardées comme démontrées; on a alors

$$M'_p \leqq \frac{1}{m_p},$$

$$m'_p \geqq \frac{1}{M_p}.$$

§ 3. *Cas de la sphère.*

On peut très facilement calculer toutes ces quantités quand la surface S est une sphère. Nous supposerons pour simplifier l'écriture que le rayon de cette sphère a été pris pour l'unité de longueur, le centre de la sphère pour origine et nous poserons:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Un polynôme sphérique d'ordre n

$$H_p = X_p r^n$$

est un polynôme homogène d'ordre n en x, y, z, qui satisfait à l'équation de LAPLACE et X_p qui est une fonction homogène d'ordre o en x, y, z, s'appellera une fonction sphérique d'ordre n.

Parmi les fonctions sphériques d'ordre n j'en choisirai $2n + 1$ que j'appellerai fondamentales et que je désignerai par

$$X_p, \qquad [p = n^2 + 1, n^2 + 2, \ldots, (n+1)^2].$$

Toutes les autres fonctions sphériques d'ordre n en seront des combinaisons linéaires.

Je choisirai les fonctions fondamentales de telle façon que

$$\int X_p^2 d\omega = 1, \qquad \int X_p X_q d\omega = 0 \qquad (p \gtrless q).$$

Les intégrales sont étendues à la surface de la sphère.

Cela posé, considérons une simple couche et choisissons-la de telle sorte qu'à l'intérieur de S on ait:

$$W_1 = \Sigma \beta_p X_p r^n \quad (n \text{ étant l'ordre de } X_p).$$

On aura alors à l'extérieur de S

$$W_1 = \Sigma \beta_p X_p r^{-(n+1)}$$

et par conséquent:

$$V_1 = V_1' = \Sigma \beta_p X_p, \qquad \frac{dV_1}{dn} = \Sigma n \beta_p X_p, \qquad \frac{dV_1'}{dn} = -\Sigma (n+1) \beta_p X_p.$$

On en déduit:

$$J_1 = \Sigma n \beta_p^2; \qquad J_1' = \Sigma (n+1) \beta_p^2.$$

Cela nous montre d'abord que J_1 est toujours plus petit que J_1'; et on voit tout de suite que:

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = m_3 = m_4 = \frac{1}{2}, \qquad m_5 = m_6 = \ldots = m_9 = \frac{2}{3} \text{ etc.}$$

et en général:

$$m_p = \frac{n}{n+1} \quad [\text{où } n^2 < p \leq (n+1)^2].$$

D'autre part on a:

$$M_q = 1.$$

Pour nous en rendre compte supposons que les β_p soient des fonctions linéaires de q constantes arbitraires

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q.$$

J_1 et J'_1 seront des polynômes du second degré par rapport aux α. Le rapport $\frac{J_1}{J'_1}$ considéré comme fonction des α aura un maximum R_1 et un minimum R_2.

Il est clair que R_1 atteindra sa limite inférieure m_q quand on fera

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \beta_q = \alpha_q, \quad \beta_p = 0 \quad (p > q).$$

Quant à R_2, il peut approcher autant qu'on veut de 1. Soit en effet pour un entier k quelconque

$$\beta_p = 0 \quad (p \leqq k); \qquad \beta_p = 0 \quad (p > k + q),$$

$$\beta_{k+h} = \alpha_h. \qquad (h = 1, 2, \ldots, q)$$

Le minimum R_2 est égal à

$$\frac{n}{n+1} \qquad [n^2 < k + 1 \leqq (n+1)^2];$$

on peut donc prendre k assez grand pour que ce minimum soit aussi voisin que l'on veut de 1.

Considérons maintenant une double couche telle qu'à l'intérieur de S on ait:

$$W_2 = \Sigma \beta_p X_p r^n.$$

On aura:

$$V_2 = \Sigma_p \beta_p X_p, \qquad \frac{dV_2}{dn} = -\frac{dV'_2}{dn} = \Sigma n_p \beta_p X_p$$

d'où: à l'extérieur de S

$$W_2 = -\sum \frac{n}{n+1} \beta_p X_p r^{-n-1}$$

et

$$V'_2 = -\sum \frac{n}{n+1} \beta_p X_p.$$

On en déduit:

$$J_2 = \Sigma n \beta_p^2, \qquad J'_2 = \sum \frac{n^2}{n+1} \beta_p^2.$$

On en déduit:

$$M'_p = \frac{1}{m_p} = \frac{n+1}{n} \quad [\text{où } n^2 < p \leq (n+1)^2],$$

$$m'_p = 1.$$

Ceci entraine les inégalités suivantes les plus importantes à notre point de vue:

$$2 > \frac{J_2}{J'_2} > 1.$$

§ 4. *Surfaces simplement connexes.*

Nous allons maintenant examiner le cas où la surface S est une surface simplement connexe quelconque sans point singulier.

On peut alors trouver une transformation qui jouisse des propriétés suivantes:

Soit M le point donné de coordonnées x, y, z; soit M' son transformé de coordonnées x', y', z'.

1°. A tout point M de l'espace correspondra un point M' et un seul, et inversement.

2°. Les coordonnées x', y', z' de M' seront des fonctions continues de x, y, z; ces fonctions auront des dérivées des deux premiers ordres et ces dérivées seront finies et continues.

3°. Inversement x, y, z seront des fonctions continues de x', y', z' et les dérivées des deux premiers ordres de ces fonctions seront également finies et continues.

4°. Quand le point M décrira la surface S, le point M' décrira la sphère S' qui a pour équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

5°. Lorsque x, y, z sont très grands, $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ sont des fonctions continues de $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$; ces fonctions ont des dérivées des deux premiers ordres, qui restent finies et continues, même quand une ou plusieurs des trois quantités $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ s'annule. Enfin quand $x^2 + y^2 + z^2$ croît indéfiniment, $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ainsi que les dérivées des deux premiers ordres de x', y', z' par rapport à x, y, z tendent *uniformément* vers 0, excepté $\frac{dx'}{dx}$, $\frac{dy'}{dy}$, $\frac{dz'}{dz}$ qui tendent uniformément vers 1.

En d'autres termes, si $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est un infiniment grand du 1[er] ordre, x', y', z' seront égaux à x, y, z aux infiniment petits près du 2[d] ordre.

Il est clair qu'on pourra toujours satisfaire à ces différentes conditions et cela d'une infinité de manières; le choix de la transformation comportera encore un très large degré d'arbitraire.

Soit maintenant p simples couches répandues à la surface de S et ayant respectivement pour potentiels:

$$W_1^1, \ldots, W_p^1.$$

Soit

$$W_1 = \alpha_0 W_0^1 + \alpha_1 W_1^1 + \ldots + \alpha_p W_p^1$$

et formons le rapport $\frac{J_1'}{J_1}$.

Nous aurons

$$J_1 = \int \sum \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de S et J_1' étant égal à la même intégrale étendue à l'extérieur de S.

Mais les intégrales J_1 (et J_1') qui sont ici exprimées en fonctions de x, y et z, peuvent également s'exprimer en fonctions de x', y' et z'.

Les dérivées $\frac{dW_1}{dx}, \frac{dW_1}{dy}, \frac{dW_1}{dz}$ sont en effet des fonctions linéaires des dérivées $\frac{dW_1}{dx'}, \frac{dW_1}{dy'}, \frac{dW_1}{dz'}$ dont les coëfficients sont des fonctions données

de x', y', z', puisque nous connaissons x, y, z en fonctions de x', y', z'. De même le jacobien de x, y, z par rapport à x', y', z' sera une fonction connue de x', y', z'.

Nous pouvons donc écrire:

$$J_1 = \int \Phi dx' dy' dz',$$

Φ étant un polynôme homogène du 2^d degré par rapport à

$$\frac{dW_1}{dx'}, \frac{dW_1}{dy'}, \frac{dW_1}{dz'}$$

dont les coëfficients sont des fonctions données de x', y', z'.

L'intégrale J_1 doit être étendue à l'intérieur de la sphère S'. Quant à J'_1 ce serait la même intégrale étendue à l'extérieur de S'.

Le polynôme du 2^d degré Φ est évidemment une forme quadratique définie positive dont les coëfficients sont des fonctions continues de x', y' et z'.

Quand x, y, z (ou ce qui revient au même x', y', z') croissent indéfiniment, les coëfficients de cette forme Φ tendent vers des limites finies et déterminées: les coëfficients des termes rectangles tendent uniformément vers 0 et ceux des termes carrés tendent uniformément vers 1. Cela tient à ce que les dérivées des x par rapport aux x' tendent vers 0 et vers 1.

Si nous regardons pour un instant x', y', z' comme des paramètres et $\frac{dW_1}{dx'}, \frac{dW_1}{dy'}, \frac{dW_1}{dz'}$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace, l'équation

$$\Phi = 1$$

représente un ellipsoide. Les axes de cet ellipsoide sont des fonctions continues de x', y', z'; pour aucune valeur finie de x', y', z' il ne peut arriver que l'un des axes s'annule ou devienne infini; quand x', y', z' croissent indéfiniment, les trois axes tendent uniformément vers 1.

Il résulte de là que l'on peut assigner une limite supérieure et une limite inférieure (indépendantes de x', y', z') à ces trois axes, et par conséquent que l'on peut trouver deux nombres μ et μ', tels que l'on ait pour pour toutes les valeurs de x', y', z', et quels que soient $\frac{dW_1}{dx'}, \frac{dW_1}{dy'}, \frac{dW_1}{dz'}$:

$$\mu' \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 > \Phi > \mu \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2. \tag{1}$$

Soit maintenant W_3 le potentiel d'une simple couche répandue à la surface de la sphère S'.

Ce potentiel W_3 est une fonction de x', y', z', qui tant à l'extérieur qu'à l'intérieur de S' satisfait à l'équation

$$\frac{d^2W_3}{dx'^2}+\frac{d^2W_3}{dy'^2}+\frac{d^2W_3}{dz'^2}=0.$$

On peut évidemment choisir la densité de cette simple couche de telle façon qu'à la surface de S' on ait

$$W_3=W_1$$

et en effet on sait résoudre le problème de Dirichlet en ce qui concerne la sphère.

Formons l'intégrale

$$\int\sum\left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2dx'\,dy'\,dz'.$$

Cette intégrale étendue à l'intérieur de S' s'appellera J_3; étendue à l'extérieur de S', elle s'appellera J'_3.

Considérons également l'intégrale

$$(2)\qquad\int\sum\left(\frac{dW_3}{dx}\right)^2dx\,dy\,dz$$

qu'on calculerait en supposant que W_3 est exprimée en fonction de x, y, z, au lieu de l'être en fonction de x', y', z'. Cette intégrale est égale à

$$(3)\qquad\int\Phi_3\,dx'\,dy'\,dz'$$

où Φ_3 n'est autre chose que Φ où je suppose que W_1 ait été remplacé par W_3.

L'intégrale (2) étendue à l'intérieur de S (ou ce qui revient au même l'intégrale (3) étendue à l'intérieur de S') s'appellera K_3; étendue à l'extérieur de S, elle s'appellera K'_3.

De même j'appellerai K_1 et K'_1 l'intégrale

$$\int\sum\left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2dx'\,dy'\,dz'$$

étendue soit à l'intérieur de S', soit à l'extérieur de S'.

Comme on a

$$\Delta W_1 = \sum \frac{d^2 W_1}{dx^2} = 0$$

et qu'on n'a pas:

$$\sum \frac{d^2 W_3}{dx^2} = 0$$

comme $W_1 = W_3$ à la surface de S on aura

$$\int \sum \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 dx dy dz < \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx}\right)^2 dx dy dz$$

ou

$$J_1 < K_3;$$

on trouverait de même

$$J'_1 < K'_3.$$

D'autre part W_3 satisfait à l'équation

$$\sum \frac{d^2 W_3}{dx'^2} = 0$$

tandis que W_1 ne satisfait pas à

$$\sum \frac{d^2 W_1}{dx'^2} = 0.$$

Comme d'autre part $W_1 = W_3$ à la surface de S', on aura

$$\int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx' dy' dz' < \int \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 dx' dy' dz'$$

ou

$$J_3 < K_1.$$

De même

$$J'_3 < K'_1.$$

D'autre part les inégalités (1) nous donnent:

$$\mu' K_1 > J_1 > \mu K_1,$$
$$\mu' K'_1 > J'_1 > \mu K'_1,$$
$$\mu' J_3 > K_3 > \mu J_3,$$
$$\mu' J'_3 > K'_3 > \mu J'_3.$$

La comparaison de ces inégalités nous donne:

$$J_1 > \mu K_1 > \mu J_3,$$

$$J_1 < K_3 < \mu' J_3,$$

$$J'_1 > \mu K'_1 > \mu J'_3,$$

$$J'_1 < K'_3 < \mu' J'_3$$

d'où enfin

$$\frac{\mu}{\mu'} \frac{J_3}{J'_3} < \frac{J_1}{J'_1} < \frac{\mu'}{\mu} \frac{J_3}{J'_3}.$$

Supposons maintenant que l'on fasse varier les α sans toucher aux p potentiels $W_1^1, W_2^1, \ldots, W_p^1$.

Alors le rapport $\frac{J_1}{J'_1}$ a un certain maximum que nous avons appelé R_1 et un certain minimum que nous avons appelé R_2. De même le rapport $\frac{J_3}{J'_3}$ aura un certain maximum r_1 et un minimum r_2.

Si une quantité est toujours plus grande qu'une autre, le maximum de la première sera plus grand que le maximum de la seconde et le minimum de la première plus grand que le minimum de la seconde. On aura donc:

$$\frac{\mu}{\mu'} r_1 < R_1 < \frac{\mu'}{\mu} r_1,$$

$$\frac{\mu}{\mu'} r_2 < R_2 < \frac{\mu'}{\mu} r_2.$$

Faisons varier maintenant les potentiels W_i^1, R_1 aura une limite inférieure m_p et R_2 une limite supérieure M_p. J'appellerai de même m_p^* et M_p^* la limite inférieure de r_1 et la limite supérieure de r_2. En appliquant le même principe, j'arriverai aux inégalités:

$$\frac{\mu}{\mu'} m_p^* < m_p < \frac{\mu'}{\mu} m_p^*,$$

$$\frac{\mu}{\mu'} M_p^* < M_p < \frac{\mu'}{\mu} M_p^*.$$

Mais nous savons calculer les nombres m_p^* et M_p^* pour la sphère. Nous avons trouvé dans le numéro précédent:

$$m_p^* = \frac{n}{n+1}, \ \left[\text{où } n^2 < p \leqq (n+1)^2\right]$$

$$M_p^* = 1.$$

On a donc:

$$\frac{\mu}{\mu'}\frac{n}{n+1} < m_p < \frac{\mu'}{\mu}\frac{n}{n+1},$$

$$\frac{\mu}{\mu'} < M_p < \frac{\mu'}{\mu}.$$

Soient maintenant p doubles couches ayant pour potentiels

$$W_1^2, \ldots, W_p^2$$

et posons:

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2$$

et formons le rapport $\frac{J_2}{J_2'}$; ce rapport, quand on fera varier les α, aura un maximum R_1' et un minimum R_2'. R_1', quand on fera varier les potentiels, aura une limite inférieure m_p' et R_2' aura une limite supérieure M_p'.

Nous avons trouvé à la fin du § 2:

$$M_p' \leqq \frac{1}{m_p}, \qquad m_p' \geqq \frac{1}{M_p}.$$

Il résulte de là

$$M_p' < \frac{\mu'}{\mu}\frac{n+1}{n}, \qquad m_p' > \frac{\mu}{\mu'}.$$

Or on a toujours comme je l'ai expliqué

$$M_2' > \frac{J_2}{J_2'} > m_2'$$

d'où finalement

$$\frac{2\mu'}{\mu} > \frac{J_2}{J_2'} > \frac{\mu}{\mu'}.$$

§ 5. *Couches de masse nulle.*

Supposons que W_1 soit un potentiel dû à une simple couche dont la masse totale est nulle, et formons le rapport $\frac{J_1}{J'_1}$; je dis que nous aurons:

$$\frac{J_1}{J'_1} > m_2.$$

Soit en effet W_0 un potentiel dû à une simple couche dont la densité soit proportionnelle à celle que prendrait l'électricité en équilibre sur la surface S supposée conductrice. On aura par conséquent

$$W_0 = \text{const.} \quad \text{à l'intérieur de } S; \quad J_0 = 0.$$

Soit maintenant

$$W = \alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1,$$

α_0 et α_1 étant deux indéterminées et formons les intégrales J et J' relatives au potentiel W, intégrales qui ont pour expressions

$$\int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau.$$

Considérons également l'intégrale

$$\int \sum \frac{dW_1}{dx} \frac{dW_2}{dx} d\tau$$

que nous appellerons K quand elle sera étendue à l'intérieur de S et K' quand elle sera étendue à l'extérieur de S.

On aura:

$$J = \alpha_0^2 J_0 + 2\alpha_0\alpha_1 K + \alpha_1^2 J_1,$$

$$J' = \alpha_0^2 J'_0 + 2\alpha_0\alpha_1 K' + \alpha_1^2 J'_1,$$

$$K = \int V_0 \frac{dV_1}{dn} d\omega, \qquad K' = -\int V'_0 \frac{dV'_1}{dn} d\omega.$$

Les deux intégrales K et K' sont étendues à tous les éléments $d\omega$ de la surface S; sur cette surface

$$V_0 = V'_0 = \text{const.}$$

La masse totale de la simple couche étant nulle on aura

$$\int \frac{dV_1}{dn} d\omega = \int \frac{dV_1'}{dn} d\omega = 0.$$

On en déduit

$$K = K' = 0$$

d'où

$$J = \alpha_1^2 J_1, \qquad J' = \alpha_0^2 J_0' + \alpha_1^2 J_1',$$

$$\frac{J}{J'} = \frac{\alpha_1^2 J_1}{\alpha_0^2 J_0' + \alpha_1^2 J_1'}.$$

Le maximum R_1 de $\frac{J}{J'}$ sera donc égal à $\frac{J_1}{J_1'}$ et comme la limite inférieure de R_1 est m_2, on aura:

$$\frac{J_1}{J_1'} > m_2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pour démontrer ce résultat on est obligé de s'appuyer sur l'existence de la fonction W_0, c'est à dire sur la possibilité de résoudre le problème de la distribution électrique, c'est à dire en définitive sur le principe de Dirichlet, supposé démontré par des méthodes indépendantes de celle de Neumann.

Nous pouvons cependant sans nous appuyer sur ce principe trouver une limite inférieure du rapport $\frac{J_1}{J_1'}$.

Reprenons la transformation du § 3; nous aurons

$$J_1 = \int \Phi \, dx' dy' dz'$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de la sphère S. Désignons maintenant par K_1 et K_1', l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 dx' dy' dz'$$

étendue soit à l'intérieur de S', soit à l'extérieur de S'. Nous aurons encore:

$$\mu' K_1 > J_1 > \mu K_1,$$

$$\mu' K_1' > J_1' > \mu K_1'.$$

Remplaçons W_1 par une fonction quelconque W_3, soit Φ_3 ce que devient Φ par cette substitution.

Considérons les intégrales

$$\int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx'\, dy'\, dz', \qquad \int \Phi_3\, dx'\, dy'\, dz'$$

que nous appellerons J_3 et K_3 quand on les étend à l'intérieur de S', J'_3 et K'_3 quand on les étend à l'extérieur de S'.

Nous aurons encore:

$$\mu' J_3 > K_3 > \mu J_3,$$

$$\mu' J'_3 > K'_3 > \mu J'_3.$$

Je vais maintenant choisir W_3; ce sera le potentiel d'une simple couche de masse totale nulle répandue à la surface de la sphère S'; à la surface de cette sphère, ce potentiel devra satisfaire à la condition

$$W_3 = W_1 + C.$$

C étant une constante.

Comme on sait resoudre, à l'aide des fonctions sphériques, le problème de Dirichlet pour la sphère, on pourra déterminer la fonction W_3 de façon à satisfaire à ces conditions.

Je vais chercher à démontrer que

$$J'_1 < K'_3, \qquad J_3 < K_1.$$

Posons

$$W_3 = W_1 + R.$$

Il viendra:

$$(1) \qquad K'_3 - J'_1 = 2\int \sum \frac{dR}{dx}\frac{dW_1}{dx}\, d\tau + \int \sum \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 d\tau.$$

Les intégrales sont étendues à l'extérieur de S.

La fonction W_1 étant harmonique à l'extérieur de S, le théorème de Green nous donne:

$$(2) \qquad \int \sum \frac{dR}{dx}\frac{dW_1}{dx}\, d\tau = -\int R\, \frac{dW_1}{dn}\, d\omega;$$

R étant constant à la surface de S, le second membre de (2) se réduit à

$$-R\int\frac{dW_1}{dn}d\omega$$

ou à o puisque la masse totale de la couche qui engendre W_1 est nulle.

On a donc:

$$K_3'-J_1'=\int\sum\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 d\tau>0.$$

C. Q. F. D.

D'autre part il vient:

$$K_1-J_3=-2\int\sum\frac{dR}{dx'}\frac{dW_3}{dx'}dx'dy'dz'+\int\sum\left(\frac{dR}{dx'}\right)^2 dx'dy'dz',$$

les intégrales étant étendues à l'intérieur de S'. On trouve ensuite:

$$\int\sum\frac{dR}{dx'}\frac{dW_3}{dx'}dx'dy'dz'=0,$$

puisque R se réduit à une constante à la surface de S' et que la simple couche qui engendre W_3 a sa masse totale nulle. La démonstration est d'ailleurs la même que plus haut.

On en conclut:

$$K_1-J_3=\int\sum\left(\frac{dR}{dx'}\right)^2 dx'dy'dz'>0.$$

C. Q. F. D.

D'ailleurs d'après le § 1, relatif à la sphère, comme la masse totale qui engendre W_3 est nulle on a:

$$\frac{J_3}{J_3'}>\frac{1}{2}$$

d'où enfin:

$$J_1'<K_3'<\mu'J_3'<2\mu'J_3<2\mu'K_1<\frac{2\mu'}{\mu}J_1.$$

On voit donc sans avoir à s'appuyer sur la principe de Dirichlet que $\frac{J_1}{J_1'}$ a une limite inférieure $\frac{\mu}{2\mu'}$ qui n'est pas nulle. Mais nous ne saurions

sans le recours de ce principe démontrer que cette limite est précisement égale à m_2, ce qui d'ailleurs n'est pas utile pour notre objet.

§ 6. *Résumé.*

Nous pouvons assigner une limite supérieure et une limite inférieure au rapport

$$\frac{J_1}{J_1'},$$

J_1 et J_1' étant les deux intégrales relatives au potentiel d'une simple couche répandue sur la surface S.

La limite inférieure est $m_1 = 0$; la limite supérieure est finie.

Si nous assujettissons la simple couche à la condition que sa masse totale soit nulle, nous pouvons assigner au rapport $\frac{J_1}{J_1'}$ une limite inférieure qui n'est pas nulle.

Nous pouvons également assigner une limite supérieure et une limite inférieure au rapport

$$\frac{J_2}{J_2'},$$

J_2 et J_2' étant les deux intégrales relatives au potentiel d'une double couche répandue sur la surface S.

La limite supérieure est $\frac{1}{m_2}$ et est finie; la limite inférieure n'est pas nulle.

Pour établir les théorèmes relatifs au rapport $\frac{J_2}{J_2'}$, nous avons dû nous appuyer (cf. § 2, in fine) sur le principe de Dirichlet, d'après lequel le problème de Dirichlet comporte toujours une solution. Pour cela il nous faut supposer que ce principe a été démontré, *indépendamment de la méthode de Neumann* par d'autres méthodes qui permettent comme on le sait de le démontrer rigoureusement dans toute sa généralité, par les méthodes alternantes de M. Schwarz, ou par la méthode du balayage de Poincaré.

Au contraire pour établir les théorèmes relatifs au rapport $\frac{J_1}{J_1'}$, il n'est pas nécessaire de supposer connu le principe de Dirichlet.

Tous ces théorèmes ne sont d'ailleurs démontrés que pour les surfaces simplement connexes; mais la démonstration développée dans le paragraphe précédent permettrait dès qu'on les aurait démontrés pour une surface particulière de les étendre à toutes les surfaces qui ont les mêmes connexions.

Si on les démontrait pour le tore, ils seraient vrais pour toutes les surfaces fermées triplement connexes.

Il est aisé de les démontrer pour un domaine compris entre deux sphères concentriques; il suffit pour cela de faire encore usage des fonctions sphèriques ce qui conduit à une analyse analogue à celle du § 3.

Ils sont donc vrais pour tout domaine limité par deux surfaces simplement connexes.

J'ajouterai que la nature même de la question fait présumer qu'ils sont vrais dans tous les cas.

Notre démonstration suppose également que la surface S a partout un plan tangent et des rayons de courbure finis, sans quoi la transformation du début du § 4 ne pourrait pas se faire. Il serait sans doute possible de se débarrasser de cette restriction; je ne l'ai pas essayé.

CHAPITRE III.

Le rapport $\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}}$.

Reprenons les intégrales J_m et J'_m définies au chapitre I. De l'analyse du chapitre II on peut conclure qu'il existe un nombre μ, positif et plus grand que 1, ne dépendant que de la configuration de la surface S et jouissant de la propriété suivante: on a pour un indice pair $2m$:

$$(1) \qquad J_{2m} < \mu J'_{2m}; \qquad J'_{2m} < \mu J_{2m}.$$

Voyons quelles sont les conséquences de ces inégalités.

Supposons que comme au § 2 du chapitre I nous changions Φ en $\alpha\Phi + \beta U_{q-1}$, J_{2m} et J'_{2m} se changeront en

$$\alpha^2 J_{2m} + 2\alpha\beta J_{2m+q} + \beta^2 J_{2m+2q},$$
$$\alpha^2 J'_{2m} + 2\alpha\beta J'_{2m+q} + \beta^2 J'_{2m+2q}.$$

Les inégalités (1) subsisteront ce qui donne en supposant $q = 1$:

$$(2) \qquad \alpha^2(J_{2m} - \mu J'_{2m}) + 2\alpha\beta(J_{2m+1} - \mu J'_{2m+1}) + \beta^2(J_{2m+2} - \mu J'_{2m+2}) > 0,$$
$$\alpha^2(J'_{2m} - \mu J_{2m}) + 2\alpha\beta(J'_{2m+1} - \mu J_{2m+1}) + \beta^2(J'_{2m+2} - \mu J_{2m+2}) > 0$$

ou en changeant β en $-\beta$

$$(3) \qquad \alpha^2(J'_{2m} - \mu J_{2m}) - 2\alpha\beta(J'_{2m+1} - \mu J_{2m+1}) + \beta^2(J'_{2m+2} - \mu J_{2m+2}) > 0.$$

Additionnons (2) et (3), il viendra:

$$\alpha^2(1 - \mu)(J_{2m} + J'_{2m}) + 2\alpha\beta(1 + \mu)(J_{2m+1} - J'_{2m+1})$$
$$+ \beta^2(1 - \mu)(J_{2m+2} + J'_{2m+2}) > 0.$$

Comme cette inégalité doit avoir lieu quels que soient α et β, il faut que l'on ait:

$$(1 + \mu)^2(J_{2m+1} - J'_{2m+1})^2 < (1 - \mu)^2(J_{2m} + J'_{2m})(J_{2m+2} + J'_{2m+2}).$$

Mais:

$$J_{2m+1} - J'_{2m+1} = J_{2m+2} + J'_{2m+2}$$

il vient donc puisque $J_{2m+2} + J'_{2m+2}$ et $J_{2m} + J'_{2m}$ sont essentiellement positifs:

$$\frac{J_{2m+2} + J'_{2m+2}}{J_{2m} + J'_{2m}} < \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right)^2.$$

Nous pouvons donc conclure de là qu'il existe un nombre A tel que

$$J_{2m} + J'_{2m} < A\left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right)^{2m}.$$

Si nous posons:

$$\frac{1 - \mu}{1 + \mu} = L$$

nous voyons que L sera plus petit que 1 puisque μ est positif; on aura:

$$J_{2m} + J'_{2m} < AL^{2m}$$

et a fortiori:

$$J_{2m} < AL^{2m}; \qquad J'_{2m} < AL^{2m}.$$

Il résulte de là que les séries

$$(4) \qquad \begin{aligned} & J_0 + \lambda^2 J_2 + \lambda^4 J_4 + \ldots, \\ & J'_0 + \lambda^2 J'_2 + \lambda^4 J'_4 + \ldots \end{aligned}$$

convergent toutes les fois que:

$$|\lambda L| < 1$$

et en particulier pour

$$\lambda = \pm 1.$$

Des inégalités (1) on peut encore déduire:

$$\left|\frac{J_{2m} - J'_{2m}}{J_{2m} + J'_{2m}}\right| < \left|\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right| = L.$$

Or

$$J_{2m} - J'_{2m} = J_{2m+1} + J'_{2m+1}$$

on en déduit:

$$\left|\frac{J_{2m+1} + J'_{2m+1}}{J_{2m} + J'_{2m}}\right| < L$$

et

$$|J_{2m+1} + J'_{2m+1}| < AL^{2m+1}.$$

D'ailleurs:

$$J_{2m+1} - J'_{2m+1} = J_{2m+2} + J'_{2m+2} < AL^{2m+2}$$

d'où:

$$|J_{2m+1}| < A\frac{1 + L}{2} L^{2m+1} < AL^{2m+1}$$

et de même

$$J'_{2m+1}| < AL^{2m+1}.$$

CHAPITRE IV.

L'intégrale $\int (V - C)^2 d\omega$.

§ 1. *Enoncé du problème.*

Soit W une fonction harmonique à l'intérieur de S, se réduisant à V à la surface de S. Soit J l'intégrale

$$J = \int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue à l'intérieur de S. On pourrait se proposer de trouver une limite supérieure du rapport

$$\frac{\int V^2 d\omega}{J},$$

l'intégrale du numérateur étant étendue aux éléments $d\omega$ de la surface S.

Sous cette forme le problème ne comporterait pas de solution; car si W se réduit à une constante différente de o, J s'annule et l'intégrale du numérateur ne s'annule pas.

Mais il n'en est plus de même si on impose à V une condition, à savoir de satisfaire à la relation

$$\int V d\omega = 0.$$

Dans ce cas, notre rapport aura, comme nous allons le voir, une limite supérieure.

On peut encore énoncer le problème d'une autre manière. Considérons l'intégrale

$$K = \int (V - C)^2 d\omega$$

où C est une constante arbitraire. Nous choisirons cette constante de telle façon que K soit minimum, ce qui entraîne la condition:

$$\int (V - C) d\omega = 0.$$

Le problème consiste à chercher une limite supérieure du rapport du minimum de K à l'intégrale J.

Soit de même W une fonction harmonique à l'extérieur de S, se réduisant à V' à la surface de S; soit J' l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue à l'extérieur de S.

Considérons maintenant l'intégrale

$$K' = \int (V' - C)^2 d\omega,$$

C étant une constante déterminée de telle sorte que

$$\int (V' - C) d\omega = 0,$$

c'est à dire de telle sorte que K' soit minimum.

On peut se proposer de déterminer une limite supérieure du rapport $\frac{K'}{J'}$.

§ 2. *Cas de la sphère.*

Supposons que S soit une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, et reprenons les notations du § 3, chapitre II.

Soit alors W une fonction harmonique à l'intérieur de S; nous pourrons écrire:

$$W = \Sigma \beta_p X_p r^n$$

et à la surface de S:

$$V = \Sigma \beta_p X_p.$$

On en déduit:

$$J = \Sigma n \beta_p^2.$$

Introduisons une constante C qui doit être déterminée de telle sorte que:

$$\int (V - C) d\omega = 0;$$

cela revient à supposer

$$C = \beta_0 X_0$$

d'où:

$$V - C = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots$$

et

$$\int (V - C)^2 d\omega = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots .$$

ce que j'écrirai

$$\int (V - C)^2 d\omega = \Sigma \beta_p^2,$$

en convenant que sous le signe Σ l'indice p doit prendre les valeurs $1, 2, \dots,$ ad inf. et ne pas prendre la valeur 0.

De même dans la formule

$$J = \Sigma n \beta_p^2$$

on peut supposer que l'indice p prend les valeurs $1, 2, \dots,$ et ne prend pas la valeur 0; car pour $p = 0$, le coëfficient est aussi égal à 0 et le terme correspondant disparaît.

Il vient alors:

$$\frac{\int (V - C)^2 d\omega}{J} = \frac{\Sigma \beta_p^2}{\Sigma n \beta_p^2} < 1.$$

Soit maintenant W une fonction harmonique à l'extérieur de S; nous pourrons écrire:

$$W = \Sigma \beta_p X_p r^{-(n+1)}$$

et à la surface de S

$$V' = \Sigma \beta_p X_p .$$

On en déduit

$$J' = \Sigma (n + 1) \beta_p^2 .$$

Introduisons une constante C qui doit satisfaire à

$$\int (V' - C) d\omega = 0.$$

Cela revient à supposer

$$C = \beta_0 X_0 .$$

On aura alors:

$$\int (V' - C)^2 d\omega = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots$$

et

$$\int V'^2 d\omega = \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots$$

d'où enfin:

$$\int (V' - C)^2 d\omega < \int V'^2 d\omega < J'.$$

§ 3. *Surfaces simplement connexes.*

Reprenons la transformation du § 4, chapitre II.

Soit W une fonction harmonique à l'intérieur de S, et soit:

$$K_1 = \int (V - C_1)^2 d\omega,$$

la constante C_1 étant choisie de telle sorte que K_1 soit minimum, c'est à dire que

$$\int (V - C_1) d\omega = 0.$$

Soit $d\omega'$ l'élément de S' qui correspond à l'élément $d\omega$ de S; soit:

$$\frac{d\omega}{d\omega'} = \psi;$$

ψ sera une fonction des coordonnées du centre de gravité de l'élément $d\omega$; cette fonction essentiellement positive aura un maximum h et un minimum h'.

Nous aurons ensuite:

$$J_1 = \int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de S, ou ce qui revient au même:

$$J_1 = \int \Phi dx' dy' dz',$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de la sphère S'.

On aura d'ailleurs comme au § 4, chapitre II:

$$(1) \qquad \mu' \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2 < \Phi < \mu \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2,$$

ces inégalités restant vraies quand on remplace W par une fonction quelconque.

Soit ensuite W_3 une fonction de x', y', z' définie par les conditions suivantes:

Elle sera harmonique à l'intérieur de la sphère S', et à la surface de cette sphère on aura:

$$W_3 = W = V.$$

On saura déterminer cette fonction puisqu'on sait résoudre le problème de Dirichlet en ce qui concerne la sphère.

On aura alors en vertu des inégalités (1):

$$J_1 > \mu' \int \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2 dx'\, dy'\, dz'.$$

Mais la fonction W_3 étant harmonique, on aura

$$\int \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2 dx'\, dy'\, dz' > \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx'\, dy'\, dz', \tag{2}$$

d'où si je désigne par J_3 l'intégrale du second membre de (2):

$$J_1 > \mu' J_3.$$

Soit maintenant C_3 une constante choisie de telle sorte que:

$$\int (W_3 - C_3)\, d\omega' = 0$$

et soit

$$K_3 = \int (W_3 - C_3)^2 d\omega' = \int (V - C_3)^2 d\omega,$$

il viendra en vertu du paragraphe précédent:

$$K_3 < J_3.$$

D'autre part:

$$\int (V - C_3)^2 d\omega = \int (V - C_3)^2 \psi\, d\omega' < h \int (V - C_3)^2 d\omega'$$

et comme C_1 a été choisi de telle sorte que K_1 soit minimum:

$$K_1 = \int (V - C_1)^2 d\omega < \int (V - C_3)^2 d\omega,$$

d'où finalement:

$$K_1 < h K_3.$$

On déduit de là:

$$\frac{K_1}{J_1} < \frac{h}{\mu}.$$

Nous obtenons donc une limite supérieure du rapport $\frac{K_1}{J_1}$.

Soit maintenant W une fonction harmonique à l'extérieur de S et se réduisant à V' à la surface de S.

Soit C_1 une constante telle que

$$\int (V' - C_1) d\omega = 0$$

et soit:

$$K_1' = \int (V' - C_1)^2 d\omega.$$

Soit:

$$J_1' = \int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau = \int \Phi dx' dy' dz',$$

les intégrales étant étendues la première à l'extérieur de S, la seconde à l'extérieur de S'.

Soit maintenant W_3 une fonction de x', y', z' harmonique à l'extérieur de S' et se réduisant à $W = V'$ à la surface de cette sphère.

Considérons l'intégrale

$$J_3' = \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx' dy' dz'$$

étendue à l'extérieur de S' et l'intégrale:

$$K_3' = \int (W_3 - C_3)^2 d\omega' = \int (V' - C_3)^2 d\omega',$$

C_3 étant choisi de façon que

$$\int (V' - C_3) d\omega' = 0.$$

On aura encore pour les mêmes raisons que plus haut

$$K_3' < J_3' < \frac{J_1'}{\mu},$$

$$K_1' = \int (V' - C_1)^2 d\omega < \int (V' - C_3)^2 d\omega < h K_3',$$

d'où finalement:

$$\frac{K_1'}{J_1'} < \frac{h}{\mu}.$$

§ 4. *Application au problème de Neumann.*

Reprenons les notations de l'introduction et du chapitre I, soit:

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots.$$

Soit une constante C telle que

$$\int (V_m - C) d\omega = 0,$$

on aura en vertu du paragraphe précédent:

$$\int (V_m - C)^2 d\omega < \frac{h}{\mu} J_{2m}.$$

Soit de même C' une constante telle que:

$$\int (V_m' - C') d\omega = 0,$$

on aura encore

$$\int (V_m' - C')^2 d\omega < \frac{h}{\mu} J_{2m}'.$$

Si nous considérons le principe de Dirichlet comme préalablement démontré et si nous admettons par conséquent les résultats du § 1, chapitre III, nous pourrons écrire:

$$\int (V_m - C)^2 d\omega < \frac{hA}{\mu} L^{2m}; \qquad \int (V_m' - C')^2 d\omega < \frac{hA}{\mu} L^{2m}.$$

Soit maintenant C_m une constante telle que:

$$\int (U_m - C_m) d\omega = 0.$$

Comme

$$U_m = \frac{V_m + V_m'}{2},$$

on aura:

$$C_m = \frac{C + C'}{2}.$$

Posons alors:

$$\Omega_m = \int (U_m - C_m)^2 d\omega.$$

Il vient:

$$4\Omega_m = \int (V_m - C)^2 d\omega + \int (V'_m - C')^2 d\omega + 2\int (V_m - C)(V'_m - C')d\omega.$$

Or en vertu de l'inégalité de SCHWARZ:

$$\left[\int (V_m - C)(V'_m - C)d\omega\right]^2 < \int (V_m - C)^2 d\omega \int (V'_m - C')^2 d\omega < \frac{h^2 A^2}{\mu^2} L^{4m}.$$

On a donc finalement

$$\Omega_m < \frac{hA}{\mu} L^{2m}.$$

CHAPITRE V.

Convergence de la série de Neumann.

§ 1. *Démonstration.*

Admettons que le principe de DIRICHLET ait été préalablement établi par des méthodes indépendantes de celle de NEUMANN.

Il résulte alors du chapitre précédent que l'intégrale

$$\Omega_m = \int (U_m - C_m)^2 d\omega$$

est plus petite que

$$BL^{2m},$$

B étant un nombre positif que j'ai désigné par $\frac{hA}{\mu}$ dans le chapitre précédent mais que je représente maintenant par une seule lettre.

Je me propose maintenant de trouver une limite supérieure de $|W_m|$ et par conséquent du terme général de la série de Neumann.

Nous adopterons les notations suivantes, que nous avons déjà employées dans l'introduction.

Soit $d\omega'$ un élément de la surface S ayant pour centre de gravité un point M' dont les coordonnées sont x', y', z'; soit $d\sigma'$ l'angle solide sous lequel $d\omega'$ est vu du point M dont les coordonnées sont x, y, z.

W_m sera la valeur de la fonction W_m au point x, y, z qui pourra être extérieur ou intérieur à la surface S. Lorsque le point x, y, z viendra sur la surface S, la valeur de la fonction W_m en ce point x, y, z s'appellera U_m, tandis que je désignerai par U'_m la valeur de cette fonction au point x', y', z' qui est toujours sur la surface.

On aura alors:

$$W_{m+1} = \int \frac{U'_m d\sigma'}{2\pi}.$$

D'autre part on aura:

$$\int \frac{d\sigma'}{2\pi} = 2, 1 \text{ ou } 0,$$

selon que le point x, y, z sera intérieur à S, sur la surface S elle-même, ou enfin extérieur à S.

Si donc le point x, y, z est extérieur à S, on aura:

$$W_{m+1} - 2C_m = \int \frac{(U'_m - C_m)d\sigma'}{2\pi}.$$

S'il est sur S on aura:

$$W_{m+1} - C_m = U_{m+1} - C_m = \int \frac{(U'_m - C_m)d\sigma'}{2\pi}.$$

Si enfin il est extérieur à S, on aura:

$$W_{m+1} = \int \frac{(U'_m - C_m)d\sigma'}{2\pi}.$$

Dans tous les cas l'inégalité de Schwarz nous donnera:

$$(1) \qquad \left| \int \frac{U'_m - C_m}{2\pi} \frac{d\sigma'}{d\omega'} d\omega' \right|^2 < \int (U'_m - C_m)^2 d\omega' \int \left(\frac{d\sigma'}{2\pi d\omega'}\right)^2 d\omega'.$$

Le second membre de cette inégalité est le produit de deux intégrales; la première de ces intégrales n'est autre chose que Ω_m; étudions la seconde.

On a:

$$\frac{d\sigma'}{d\omega'} = \frac{\cos\varphi}{r^2},$$

r étant le distance des points x', y', z' et x, y, z, et φ l'angle que fait la droite qui joint ces deux points avec la normale à l'élément $d\omega'$.

On aura donc:

$$\int\left(\frac{d\sigma'}{2\pi d\omega'}\right)^2 d\omega' < \int\frac{d\omega'}{4\pi^2 r^4}.$$

Si le point x, y, z n'est pas sur la surface S, r ne s'annulera pas et l'intégrale du second membre sera finie; je l'appelle D.

On aura donc:

$$\left[\int\frac{U'_m - C_m}{2\pi}d\sigma'\right]^2 < (BL^{2m})D.$$

Si le point x, y, z est intérieur à S on aura donc:

$$|W_{m+1} - 2C_m| < L^m\sqrt{BD}.$$

Si le point x, y, z est extérieur à S, on aura:

$$|W_{m+1}| < L^m\sqrt{BD}.$$

Dans les deux cas D est un nombre positif fini qui dépend de la position du point x, y, z, mais qui croît indéfiniment quand ce point x, y, z se rapproche indéfiniment de la surface S.

Quand le point x, y, z est sur la surface S, nous ne savons rien encore.

Cela suffit pour nous montrer que la série de Neumann converge tant à l'intérieur de S qu'à l'extérieur de S. Pour un point extérieur la série

$$W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots$$

converge pour $|\lambda| \leqq 1$ puisque le terme général

$$\lambda^{m+1} W_{m+1}$$

est plus petit en valeur absolue que le terme correspondant

$$\lambda^{m+1} L^m \sqrt{BD}$$

d'une progression géométrique dont la raison $L\lambda$ est plus petite que 1 en valeur absolue.

Pour un point intérieur la série que nous venons de considérer ne convergerait plus, mais la série:

$$W_0 + \lambda(W_1 - 2C_0) + \lambda^2(W_2 - 2C_1) + \ldots$$

serait convergente.

C'est un résultat analogue à celui qu'avait obtenu Neumann dans le cas des surfaces convexes, car il avait envisagé la série:

$$(W_0 - C) + \lambda(W_1 - C) + \lambda^2(W_2 - C) + \ldots,$$

C étant une constante.

Ces résultats toutefois ne sauraient nous suffire. En effet nous n'avons démontré ni la convergence pour les points de la surface S elle-même, ni l'uniformité de la convergence. Nous ne saurions donc conclure que la somme de la série satisfait bien aux conditions du problème de Dirichlet.

Il est donc nécessaire d'étudier le cas où le point x, y, z vient sur la surface S. Le raisonnement qui précède se trouve en défaut; car l'intégrale

$$\int \left(\frac{d\sigma}{2\pi\, d\omega}\right)^2 d\omega'$$

ne reste pas finie. Il n'en serait pas de même dans le plan; cette intégrale resterait finie, pourvu que la courbe qui joue le rôle de la surface S ait son rayon de courbure fini.

Mais dans l'espace une démonstration spéciale est nécessaire.

On a alors

$$(2) \qquad U_{m+1} - C_m = \int \frac{U'_m - C_m}{2\pi} \frac{d\sigma}{d\omega} d\omega',$$

l'intégrale étant étendue à la surface S tout entière.

Soit Σ un cylindre de revolution de rayon ρ ayant pour axe la normale à S dont le pied est le point M qui a pour coordonnées x, y, z.

Décomposons l'intégrale du second membre de (2) en deux parties; la première partie que j'appellerai H sera étendue à la portion de la surface S qui est extérieure à Σ; la seconde partie que j'appellerai H' sera étendue à la portion de la surface S qui est intérieure à Σ. On aura donc:

$$U'_{m+1} - C_m = H + H'.$$

On aura en vertu de l'inégalité de SCHWARZ

$$(3) \qquad H^2 < \int (U'_m - C_m)^2 d\omega' \int \left(\frac{d\sigma}{2\pi d\omega}\right)^2 d\omega'.$$

Les intégrales du second membre de (3) sont les mêmes que celles du second membre de (1); mais elles doivent être étendues seulement à la portion de S extérieure à Σ. Elles sont donc plus petites que les intégrales correspondantes du second membre de (1).

La première de ces intégrales est plus petite que Ω_m et par conséquent que BL^{2m}.

La seconde est finie; mais elle dépend de ρ et croît indéfiniment quand ρ tend vers 0.

Il s'agit d'en trouver une limite supérieure.

Nous supposerons qu'en tous les points de la surface S il y a un plan tangent et que les deux courbures principales sont finies.

On pourra alors trouver un nombre R tel qu'on puisse construire une sphère de rayon R qui en un point quelconque de S soit tangente à cette surface et soit tout entière à l'intérieur de cette surface.

Soient maintenant M et M' deux points quelconques de la surface S, r leur distance, θ l'angle du plan tangent en M avec le plan tangent en M'.

Si comme nous le supposons, les courbures principales sont partout finies, on pourra assigner une limite supérieure au rapport:

$$\frac{\theta}{r}.$$

Soit:

$$\frac{\theta}{r} < E;$$

E est une constante indépendante de la position des points M et M' et dépendant seulement de la forme de la surface S.

Si nous posons:

$$\rho_0 = \frac{\pi}{4E}$$

toutes les fois que

$$r < \rho_0$$

nous aurons:

$$\theta < \frac{\pi}{4}.$$

Cela va nous permettre de trouver une limite supérieure de l'intégrale

$$\int \left(\frac{d\sigma}{2\pi d\omega'}\right)^2 d\omega'.$$

Cette intégrale doit être étendue à la portion de S qui est extérieure à Σ, c'est à dire à la portion de S définie par l'inégalité

$$\alpha > \rho.$$

Je désigne par α la projection de la droite $MM' = r$ sur le plan tangent au point M.

Mais il faut encore la décomposer en deux parties, la première partie sera étendue à la portion de S définie par

$$r > \rho_0$$

et la seconde partie à la portion de S définie par

$$\rho_0 > r > \alpha > \rho.$$

La première partie sera plus petite que

$$\int \frac{d\omega'}{4\pi^2 r^4} < \int \frac{d\omega'}{4\pi^2 \rho_0^4} < \frac{S^2}{4\pi^2 \rho_0^4},$$

S étant l'aire totale de la surface S.

Pour évaluer la seconde partie employons un système particulier de coordonnées.

Au point M dont les coordonnées sont x, y, z, menons le plan tangent à S. Projetons sur ce plan le point M', centre de gravité de $d\omega'$; soit m' cette projection. Rapportons ce point m' dans le plan tangent

à un système de coordonnées polaires α et β en prenant pour pôle le point M.

Alors α est le rayon vecteur $m'M$; c'est le projection de r de sorte que:

$$\alpha < r.$$

La projection de l'élément $d\omega'$ sur le plan tangent aura pour aire

$$\alpha d\alpha d\beta,$$

de sorte que nous aurons

$$d\omega' = \frac{\alpha d\alpha d\beta}{\cos\theta}$$

et puisque dans cette portion de S où $r < \rho_0$ on a:

$$\theta < 45°,$$

on aura:

$$d\omega' < \alpha\sqrt{2}\, d\alpha d\beta.$$

Menons maintenant une sphère de rayon R, tangente à S en M' et tout entière intérieure à S.

La droite MM' coupe cette sphère en P et comme la sphère est intérieure à S on a

$$MP < MM'.$$

D'autre part

$$MM' = r, \qquad MP = 2R\,|\cos\varphi|$$

d'où:

$$\left|\frac{d\sigma'}{d\omega'}\right| = \frac{|\cos\varphi|}{r^2} < \frac{1}{2Rr}.$$

La seconde partie de notre intégrale

$$\int \left(\frac{d\sigma'}{2r d\omega}\right)^2 d\omega'$$

sera donc plus petite que

$$\int \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2}\frac{\alpha d\alpha d\beta}{4R^2 r^2} < \int \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2}\frac{d\alpha d\beta}{\alpha}.$$

Il faut intégrer par rapport à β depuis o jusqu'à 2π, par rapport à α

depuis ρ jusqu'à une valeur qui correspond à la condition $r = \rho_0$ et qui est par conséquent plus petite que ρ_0 puisque α est plus petit que r. L'intégrale sera donc certainement plus petite que

$$\frac{\sqrt{2}}{8\pi R^2}\log\frac{\rho_0}{\rho}.$$

Je déduis de là l'inégalité:

$$H^2 < BL^{2m}\left(\frac{S^2}{4\pi^2\rho_0^4} + \frac{\sqrt{2}}{8\pi R^2}\log\frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

J'écrirai cela sous la forme:

$$H < L^m\sqrt{P - Q\log\rho},$$

P et Q étant des nombres qui ne dépendent, ni de m, ni de ρ, mais seulement de ρ_0 et de la forme de la surface S.

Etudions maintenant

$$H' = \int (U'_m - C_m)\frac{d\sigma'}{2\pi d\omega'}d\omega'.$$

Nous avons trouvé à la fin de l'introduction

$$|U_m| < M_0 N^m.$$

Comme on a

$$\int (U_m - C_m)d\omega' = 0$$

et que C_m est pour ainsi dire la valeur moyenne de U_m, on aura aussi

$$|C_m| < M_0 N^m$$

et par conséquent:

$$|U_m - C_m| < 2M_0 N^m;$$

il vient donc:

$$|H'| < 2M_0 N^m \int \frac{1}{4\pi Rr}\sqrt{2}\,\alpha d\alpha d\beta < 2M_0 N^m \int \frac{\sqrt{2}\,d\alpha d\beta}{4\pi R}.$$

Il faut intégrer par rapport à β de 0 à 2π, par rapport à α de 0 à ρ, ce qui donne:

$$|H'| < M_0 N^m \sqrt{2}\frac{\rho}{R}.$$

Il en résulte

$$|U_{m+1} - C_m| < L^m \sqrt{P - Q \log \rho} + M_0 N^m \sqrt{2} \frac{\rho}{R}.$$

Cette inégalité doit avoir lieu quel que soit ρ; prenons

$$\rho = \left(\frac{L}{N}\right)^m;$$

il vient:

$$(4) \qquad |U_{m+1} - C_m| < L^m \sqrt{P + mQ \log \frac{N}{L}} + L^m \frac{M_0 \sqrt{2}}{R}.$$

Le second membre de l'inégalité (4) n'est pas le terme général d'une progression géométrique décroissante de raison L, car le nombre m figure encore dans le radical

$$\sqrt{P + mQ \log \frac{N}{L}},$$

mais c'est le terme général d'une série convergente.

Si même L_1 est un nombre quelconque plus petit que 1, mais plus grand que L, on peut toujours trouver un nombre A_1 tel que le second membre de (4) soit plus petit que

$$A_1 L_1^m$$

d'où:

$$|U_{m+1} - C_m| < A_1 L_1^m.$$

La série

$$(5) \qquad U_0 + (U_1 - C_0) + (U_2 - C_1) + \ldots + (U_{m+1} - C_m) + \ldots$$

est donc absolument convergente; et de plus, comme les nombres L, M_0, P, Q, N, R qui figurent dans l'intégrale (4) ne dépendent pas de la position du point M sur la surface S, la convergence est uniforme.

§ 2. *Uniformité de la convergence.*

Il résulte du paragraphe précédent que la série

$$U_0 + (U_1 - C_0) + (U_2 - C_1) + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente; il est aisé de voir qu'il en est de même de la série:

$$(1)\qquad (U_0 - C) + (U_1 - C) + (U_2 - C) + \dots$$

où C est une constante convenablement choisie.

Nous avons trouvé en effet:

$$|U_{m+1} - C_m| < A_1 L_1^m.$$

En tenant compte de la relation

$$\int (U_{m+1} - C_{m+1}) d\omega' = 0$$

qui exprime que C_{m+1} est la valeur moyenne de U_{m+1}, on en déduit:

$$|C_{m+1} - C_m| < A_1 L_1^m.$$

La série

$$C_0 + (C_1 - C_0) + (C_2 - C_1) + \dots$$

est donc absolument convergente; j'appelle sa somme C; le reste de la série

$$(C_{m+1} - C_m) + (C_{m+2} - C_{m+1}) + \dots = C - C_m$$

est plus petit que

$$\frac{A_1}{1 - L_1} L_1^m$$

et par conséquent

$$|U_{m+1} - C| < |U_{m+1} - C_m| + |C - C_m| < A_1 L_1^m \left(1 + \frac{1}{1 - L_1}\right).$$

Cela démontre la convergence de la série (1).

De l'inégalité précédente je déduis

$$|U_m - C| < A_1 L_1^{m-1} \left(1 + \frac{1}{1 - L_1}\right),$$

ce que je puis écrire

$$|U_m - C| < B_1 L_1^m,$$

B_1 étant un nombre positif.

Envisageons maintenant les égalités

$$W_{m+1} = \int (U_m - C)\frac{d\sigma}{2\pi},$$

$$W_{m+1} - 2C = \int (U_m - C)\frac{d\sigma}{2\pi},$$

qui sont vraies, la première quand le point x, y, z est extérieur à S, la seconde quand il est intérieur à S.

On en déduit

$$|W_{m+1}| < B_1(N+1)L_1^m$$

pour un point extérieur et

$$|W_{m+1} - 2C| < B_1(N+1)L_1^m$$

pour un point intérieur.

N est toujours le nombre défini à la fin de l'introduction.

Il résulte de là que la série

$$\Sigma W_m$$

est convergente dans tout l'espace extérieur à S et que *dans tout ce domaine la convergence est absolue et uniforme.*

De même la série:

$$\Sigma(W_m - 2C)$$

est convergente dans tout l'espace intérieur à S et dans tout ce domaine la convergence est absolue et uniforme.

Soit donc d'abord un point extérieur à S et posons:

$$W = W_0 + W_1 + \ldots W_m + \ldots.$$

La série du second membre étant convergente définit une fonction de x, y, z que j'appelle W; il me reste à montrer que cette fonction satisfait aux conditions du problème de Dirichlet.

D'abord elle a des dérivées de tous les ordres.

Nous avons en effet

$$W_{m+1} = \int (U_m - C)\frac{d\sigma}{2\pi}.$$

ce que je puis écrire:

$$W_{m+1} = \int (U_m - C) F d\omega',$$

F étant une fonction de x, y, z, x', y', z' qui ne cesse d'être holomorphe que quand les points x, y, z et x', y', z' se confondent.

Soit alors DW une dérivée d'ordre quelconque de W prise par rapport à x, y, z. Il viendra en différentiant sous le signe $\int$:

$$DW_{m+1} = \int (U_m - C) DF d\omega'.$$

Dans tout domaine qui est tout entier extérieur à S, on pourra assigner à $|DF|$ une limite supérieure que j'appellerai H; d'où l'on déduit:

$$|DW_{m+1}| < B_1 . L_1^m . H.$$

Nous en déduirons que la série

$$DW_0 + DW_1 + DW_2 + \ldots$$

est uniformément convergente, non pas dans tout l'espace extérieur à S, mais dans tout domaine tout entier extérieur à S.

Elle a donc pour somme DW.

On aura par exemple:

$$\Delta W = \Delta W_0 + \Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots$$

et comme

$$\Delta W_m = 0$$

on aura aussi:

$$\Delta W = 0.$$

Il reste à démontrer que W tend uniformément vers $C - \Phi$ quand le point x, y, z se rapproche indéfiniment de S.

Construisons une série de surfaces s'enveloppant mutuellement et enveloppant S; soient $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ces surfaces et supposons que quand n croît indéfiniment la plus courte distance de S et de S_n tende vers 0.

Ces surfaces $S_1, S_2, \ldots, S_n$ peuvent d'ailleurs être quelconques.

Je dis que je puis prendre n assez grand pour que $|W + \Phi - C|$ soit plus petit qu'une quantité donnée ε toutes les fois que le point x, y, z est compris entre S_n et S.

C'est là ce que j'entends quand je dis que W tend *uniformément* vers $C - \Phi$.

Nous pouvons écrire:

$$W = (W_0 + W_1 + W_2 + \ldots + W_m) + (W_{m+1} + W_{m+2} + \ldots .$$

La série étant uniformément convergente, nous pouvons d'abord prendre m assez grand pour que

$$| W_{m+1} + W_{m+2} + \ldots | < \frac{\varepsilon}{3},$$

assez grand en même temps pour que

$$| U_m - C | < \frac{\varepsilon}{3} \cdot$$

Le nombre m est désormais fixé; nous prendrons maintenant n assez grand pour que, toutes les fois que x, y, z est entre S et S_n, la différence de

$$W_0 + W_1 + W_2 + \ldots + W_m$$

et de sa limite:

$$V'_0 + V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_m$$

soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{3}$.

Or

$$V'_0 + V'_1 + \ldots + V'_m = U_m - \Phi.$$

Il est donc clair que si toutes ces conditions sont remplies à la fois, la différence de W et de $C - \Phi$ sera plus petite que ε.

C. Q. F. D.

Considérons maintenant un point intérieur à S et posons:

$$W = (W_0 - 2C) - (W_1 - 2C) + (W_2 - 2C) - \ldots .$$

Nous avons vu que la série qui figure dans le second membre de cette équation est convergente.

On démontrerait comme plus haut que W a des dérivées de tous les ordres.

On trouverait de même:

$$\Delta W = \Delta(W_0 - 2C) - \Delta(W_1 - 2C) + \Delta(W_2 - 2C) - \ldots$$

et on en déduirait

$$\Delta W = 0.$$

La somme des $m + 1$ premiers termes de la série (où je suppose par exemple m impair)

$$(W_0 - 2C) - (W_1 - 2C) + (W_2 - 2C) - \ldots - (W_m - 2C)$$

tend vers

$$(V_0 - V_1 + V_2 - V_3 + \ldots - V_m)$$

quand le point x, y, z se rapproche indéfiniment de la surface S.

Je supposerai m impair pour fixer les idées; on a alors:

$$V_0 - V_1 + V_2 - \ldots - V_m = \Phi - U_m$$

et cette expression tend vers $\Phi - C$ quand m croît indéfiniment.

Le reste de la démonstration se poursuivrait comme dans le cas du point extérieur et on verrait que W tend uniformément vers $\Phi - C$.

La fonction $W + C$ nous fournit alors la solution du problème de Dirichlet.

On remarquera que quand m croît indéfiniment, U_m tend uniformément vers C.

CHAPITRE VI.

Les fonctions fondamentales.

§ 1. *Définition des fonctions fondamentales.*

Jusqu'ici j'ai cherché à être parfaitement rigoureux. Je crois utile maintenant de rattacher ce qui précède à d'autres considérations et pour

cela de pénétrer dans un domaine que j'ai mal exploré et où je devrai me contenter de simples aperçus.

Soit W le potentiel d'une simple couche, formons les intégrales J et J' définies plus haut qui ont l'une et l'autre pour expression

$$\int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau$$

et qui doivent être étendues la première à l'intérieur de S, la seconde à l'extérieur de S.

Le rapport $\frac{J}{J'}$ étant essentiellement positif, aura un minimum; ce minimum sera d'ailleurs nul et il est clair qu'il sera atteint quand la densité de la simple couche sera proportionnelle à celle de l'électricité en équilibre sur S.

La valeur correspondante de W sera Φ_0; comme le rapport $\frac{J}{J'}$ ne change pas quand on multiplie W par un facteur constant, Φ_0 ne sera défini qu'à un facteur constant près.

Je profiterai de ce facteur constant arbitraire pour que J' soit égal à 1 et la valeur correspondante de J qui est égale à 0, je l'appellerai λ_0.

A la surface de S, Φ_0 est une constante; quant à la dérivée $\frac{d\Phi_0}{dn}$, elle est discontinue quand on traverse S. Nous devons donc distinguer la valeur $\frac{d\Phi_0}{dn}$ qui correspond à l'intérieur de S et qui est d'ailleurs nulle et la valeur $\frac{d\Phi_0'}{dn}$ qui correspond à l'extérieur de S.

Soit maintenant W le potentiel d'une autre simple couche. On aura par le théorème de Green

$$\int_S W \frac{d\Phi_0'}{dn} d\omega = \int_S \Phi_0 \frac{dW'}{dn} d\omega.$$

J'impose à W la restriction

$$\int W \frac{d\Phi_0'}{dn} d\omega = \int \Phi_0 \frac{dW'}{dn} d\omega = 0.$$

Alors J ne peut plus s'annuler et $\frac{J}{J'}$ admet un nouveau minimum qui n'est pas nul et que j'appelle λ_1. J'appelle Φ_1 la valeur de W correspondante.

Pour voir dans quelles conditions ce minimum peut être atteint il faut appliquer le calcul des variations qui donne:

$$\frac{d\Phi_1}{dn} = -\lambda_1 \frac{d\Phi_1'}{dn};$$

Φ_1 n'étant défini qu'à un facteur constant près, je puis choisir ce facteur de telle façon que

$$J' = 1, \qquad J = \lambda_1.$$

Pour aller plus loin, imposons à W une nouvelle restriction, à savoir:

$$\int W \frac{d\Phi_1'}{dn} d\omega = 0.$$

Le rapport $\frac{J}{J'}$ aura un nouveau minimum plus grand que λ_1 et que j'appelle λ_2.

Ce minimum sera atteint pour

$$W = \Phi_2.$$

Le calcul des variations nous apprend que Φ_2 est le potentiel d'une simple couche tel que

$$\frac{d\Phi_2}{dn} = -\lambda_2 \frac{d\Phi_2'}{dn}.$$

D'autre part on peut supposer

$$J' = 1, \qquad J = \lambda_2$$

et ainsi de suite.

Cet aperçu nous porte à penser qu'il existe une série de fonctions que j'appelle *fondamentales,*

$$\Phi_0, \ \Phi_1, \ \Phi_2 \dots$$

et une série de nombres positifs:

$$\lambda_0, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \dots$$

jouissant des propriétés suivantes:

1°. On a:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots .$$

2°. Les fonctions Φ_i sont des potentiels de simples couches et l'on a:

$$\frac{d\Phi_i}{dn} = -\lambda_i \frac{d\Phi_i'}{dn}.$$

3°. On aura:

$$\int \Phi_i \frac{d\Phi_k'}{dn} d\omega = \int \Phi_k \frac{d\Phi_i'}{dn} d\omega = 0$$

et par conséquent

$$\int \Phi_i \frac{d\Phi_k}{dn} d\omega = \int \Phi_k \frac{d\Phi_i}{dn} d\omega = 0.$$

4°. On aura:

$$\int \sum \left(\frac{d\Phi_i'}{dx}\right)^2 d\tau = 1; \qquad \int \sum \left(\frac{d\Phi_i'}{dx}\frac{d\Phi_k'}{dx}\right) d\tau = 0,$$

les intégrales étant étendues à l'extérieur de S; et en effet d'après le théorème de GREEN, la seconde de ces intégrales n'est autre chose que

$$\int \Phi_i \frac{d\Phi_k'}{dn} d\omega.$$

5°. On aura:

$$\int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\right)^2 d\tau = 1; \qquad \int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\frac{d\Phi_k}{dx}\right) d\tau = 0,$$

les intégrales étant étendues à l'intérieur de S.

Soit maintenant φ le potentiel d'une simple couche satisfaisant à la condition

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\lambda \frac{d\varphi'}{dn}.$$

Je dis que λ est un nombre réel positif qui figure dans la série λ_0, λ_1, λ_2, ...

Si en effet il existe une autre simple couche dont le potentiel ψ satisfasse à la condition

$$\frac{d\psi}{dn} = -\mu \frac{d\psi'}{dn}, \qquad (\mu \geq \lambda)$$

le théorème de Green nous donnera:

$$\int \psi \frac{d\varphi'}{dn} d\omega - \int \varphi \frac{d\psi'}{dn} d\omega = 0,$$

et

$$\int \psi \frac{d\varphi}{dn} d\omega - \int \varphi \frac{d\psi}{dn} d\omega = 0;$$

ou:

$$\lambda \int \psi \frac{d\varphi'}{dn} d\omega - \mu \int \varphi \frac{d\psi'}{dn} d\omega = 0$$

d'où enfin

$$\int \psi \frac{d\varphi'}{dn} d\omega = \int \varphi \frac{d\psi'}{dn} d\omega = \int \psi \frac{d\varphi}{dn} d\omega = 0.$$

Nous en concluons que l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\right) d\tau$$

est nulle, soit qu'on l'étende à l'extérieur de S, soit qu'on l'étende à l'intérieur de S.

Je dis qu'il en résulte que λ est réel; si en effet λ était imaginaire, nous pourrions supposer φ et ψ, λ et μ imaginaires conjugués et l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\right) d\tau$$

devrait être positive tandis que nous venons de voir qu'elle est nulle.

Si maintenant nous désignons par j et j' les valeurs de l'intégrale:

$$\int \sum \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue soit à l'intérieur de S, soit à l'extérieur de S, on aura

$$j = \lambda j',$$

ce qui montre que λ ne peut être négatif.

Si λ est positif il devra ou bien figurer dans la série

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

ou bien être compris entre deux termes de la série; ou bien être plus grand que tous les λ_i si les λ_i ne peuvent pas croître indéfiniment.

Nous devons exclure la seconde de ces hypothèses.

Si on avait en effet

$$\lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1}$$

on aurait:

$$(\alpha) \qquad \int \varphi \frac{d\Phi_i'}{dn} d\omega = 0$$

et le rapport $\frac{J}{J'}$ serait égal à λ quand on y ferait $W = \varphi$ et à λ_{i+1} quand on y ferait $W = \Phi_{i+1}$; il serait donc plus grand dans le second cas que dans le premier; or cela est impossible puisque la fonction Φ_{i+1} est par définition de toutes celles qui satisfont aux conditions (α) celle qui rend ce rapport minimum.

Nous verrons plus loin les raisons qui me portent à penser que la troisième hypothèse doit être également rejetée.

Soit donc

$$\lambda = \lambda_i.$$

De deux choses l'une; ou bien un seul des nombres de la série $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ sera égal à λ_i de telle sorte que:

$$\lambda_{i-1} < \lambda_i < \lambda_{i+1},$$

le signe d'inégalité excluant l'égalité; alors φ sera égal à Φ_i à un facteur constant près.

Ou bien on aura par exemple:

$$\lambda_{i-1} < \lambda_i = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \ldots = \lambda_{i+n} < \lambda_{i+n+1}.$$

Dans ce cas φ sera une combinaison linéaire de

$$\Phi_i, \Phi_{i+1}, \ldots, \Phi_{i+n}.$$

Il est inutile d'insister sur le peu de rigueur du raisonnement qui précède bien qu'on en ait souvent employé d'analogues en physique mathématique.

Je dois pourtant indiquer ce que sont les fonctions fondamentales dans les cas les plus simples.

Si la surface S est une sphère, la fonction fondamentale sera égale à

$$Xr^n$$

à l'intérieur de S et à

$$Xr^{-n-1}$$

à l'extérieur, X étant une fonction sphérique d'ordre n.

Si la surface S est un ellipsoïde, les fonctions fondamentales ne sont autre chose que les fonctions de Lamé.

Si on appelle ρ, μ, ν les coordonnées elliptiques d'un point et si $f(\rho)$ et $f_1(\rho)$ sont deux fonctions de ρ, dites fonctions de Lamé, il existe une simple couche dont le potentiel Φ est égal à l'intérieur de S au produit

$$f(\rho)f(\mu)f(\nu)$$

et à l'extérieur au produit

$$f_1(\rho)f(\mu)f(\nu).$$

Si alors nous désignons par f' et f'_1 les dérivées de f et f_1; si $\rho = \rho_0$ est l'équation de l'ellipsoïde S, on aura:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{f'(\rho_0)}{f'_1(\rho_0)} \frac{d\Phi'}{dn},$$

ce qui montre que Φ est bien une fonction fondamentale.

§ 2. *Développements en série.*

Soit F une fonction quelconque des coordonnées d'un point sur S; diverses analogies peuvent porter à penser que F peut se développer en série procédant suivant les fonctions fondamentales.

On aurait alors:

$$F = A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_2 + \dots,$$

les A étant des coëfficients constants.

Si on admet la possibilité du développement, le calcul des coëfficients A est facile.

Pour calculer A_i, multiplions par $\frac{d\Phi_i'}{dn} d\omega$ et intégrons, il viendra en vertu des propriétés des fonctions fondamentales:

$$\int F \frac{d\Phi_i'}{dn} d\omega = A_i \int \Phi_i \frac{d\Phi_i'}{dn} d\omega = - A_i.$$

Une fois que l'on connaitrait les fonctions fondamentales, il serait aisé de résoudre le problème de Dirichlet.

Soit W la somme de la série

$$A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + \dots$$

calculée pour des points x, y, z non situés sur la surface S. La fonction W serait le potentiel d'une simple couche et W se réduirait à la fonction donnée F sur la surface S.

Formons maintenant les intégrales J et J'.

En tenant compte des relations:

$$\int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\right)^2 d\tau = \lambda_i, \qquad \int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_k}{dx}\right) d\tau = 0$$

on trouve:

$$J = A_0^2 \lambda_0 + A_1^2 \lambda_1 + A_2^2 \lambda_2 + \dots.$$

On trouverait de même:

$$J' = A_0^2 + A_1^2 + \dots$$

d'où

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_0^2 \lambda_0 + A_1^2 \lambda_1 + A_2^2 \lambda_2 + \dots}{A_0^2 + A_1^2 + \dots}.$$

Le potentiel d'une simple couche est représenté par la même série

$$A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + \dots$$

à l'intérieur et à l'extérieur de S.

Il n'en est pas de même du potentiel d'une double couche. Soit W le potentiel d'une double couche et supposons que l'on ait à l'intérieur de S:

$$W = A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + \dots$$

et à l'extérieur de S:

$$W = B_0 \Phi + B_1 \Phi_1 + \dots$$

il viendra:

$$\frac{dV}{dn} = A_0 \frac{d\Phi_0}{dn} + A_1 \frac{d\Phi_1}{dn} + \dots,$$

$$\frac{dV'}{dn} = B_0 \frac{d\Phi'_0}{dn} + B_1 \frac{d\Phi'_1}{dn} + \dots.$$

Comme

$$\frac{d\Phi_i}{dn} = -\lambda_i \frac{d\Phi'_i}{dn}$$

je puis écrire:

$$\frac{dV}{dn} = -A_0 \lambda_0 \frac{d\Phi'_0}{dn} - A_1 \lambda_1 \frac{d\Phi'_1}{dn} - \dots$$

et comme le potentiel d'une double couche est caractérisé par la condition:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV'}{dn},$$

il viendra:

$$B_i = -A_i \lambda_i.$$

On aura en particulier

$$B_0 = 0$$

puisque λ_0 est nul.

On conclut de là:

$$J' = B_0^2 + B_1^2 + \dots = A_0^2 \lambda_0^2 + A_1^2 \lambda_1^2 + \dots,$$

$$J = A_0^2 \lambda_0 + A_1^2 \lambda_1 + \dots$$

d'où:

$$\frac{J}{J'} = \frac{\Sigma A_i^2 \lambda_i}{\Sigma A_i^2 \lambda_i^2}.$$

Dans le cas de la simple couche, nous avons trouvé la formule

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_0^2 \lambda_0 + A_1^2 \lambda_1 + \dots}{A_0^2 + A_1^2 + \dots}.$$

Nous en concluons

$$\frac{J}{J'} < \lim \lambda_p \quad (\text{pour } p = \infty).$$

En d'autres termes on ne peut avoir quel que soit p

$$\frac{J}{J'} > \lambda_p.$$

Si donc les développements en séries qui précèdent sont légitimes, il ne peut pas, ainsi que je l'ai dit plus haut, exister de simple couche dont le potentiel ϕ satisfasse à la condition:

$$\frac{d\phi}{dn} = -\lambda \frac{d\phi'}{dn},$$

λ étant un nombre plus grand que tous les λ_p.

§ 3. *Application au problème de Neumann.*

Soit à trouver une double couche dont le potentiel W satisfasse à la condition:

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi. \tag{1}$$

Développons Φ en série procédant suivant les fonctions fondamentales et soit:

$$\Phi = \Sigma C_i \Phi_i.$$

Supposons de même que W soit développé en une série de même forme, de telle sorte que l'on aura à l'intérieur de S:

$$W = \Sigma A_i \Phi_i$$

et à l'extérieur de S:

$$W = -\Sigma A_i \lambda_i \Phi_i.$$

La condition (1) devient alors:

$$\Sigma A_i \Phi_i(1 + \lambda_i) = \lambda \Sigma A_i \Phi_i(1 - \lambda_i) + 2\Sigma C_i \Phi_i$$

d'où en identifiant:

$$A_i = \frac{2C_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}.$$

On a donc à l'intérieur de S:

$$W = \sum \frac{2C_i \Phi_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}$$

et à l'extérieur de S:

$$W = -\sum \frac{2C_i \lambda_i \Phi_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}.$$

Mais:

$$\frac{1}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)} = \frac{1}{1 + \lambda_i} + \lambda \frac{1 - \lambda_i}{(1 + \lambda_i)^2} + \ldots + \lambda^m \frac{(1 - \lambda_i)^m}{(1 + \lambda_i)^{m+1}} + \ldots.$$

Comme on a d'autre part

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \ldots,$$

on devra avoir à l'intérieur de S:

$$W_m = \sum \frac{2C_i \Phi_i}{1 + \lambda_i}\left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^m$$

et à l'extérieur de S:

$$W_m = -\sum \frac{2C_i \lambda_i \Phi_i}{1 + \lambda_i}\left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^m.$$

Il est aisé de déduire de là les valeurs des intégrales que dans le chapitre I nous avons appelées $J_{m.p}$; on trouve:

$$J_{m.p} = \sum \left(\frac{2C_i}{1 + \lambda_i}\right)^2 \lambda_i \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^{m+p}$$

et

$$J'_{m.p} = \sum \left(\frac{2C_i}{1 + \lambda_i}\right)^2 \lambda_i^2 \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^{m+p}.$$

Toutes les propriétés de ces intégrales, rigoureusement établies plus haut, sont des conséquences immédiates de ces formules qui ne sont malheureusement elles-mêmes qu'hypothétiques.

On voit d'abord que $J_{m.p}$ et $J'_{m.p}$ ne dépendent que de la somme $m + p$, ce qui permet d'appliquer la notation à un seul indice.

Les formules qui lient J_m, J'_m, J_{m-1}, J'_{m-1}, les inégalités auxquelles satisfont ces intégrales se déduisent aussi immédiatement des formules.

On voit par exemple pourquoi J_{2m} est toujours positif, tandis que nous ne savons rien du signe de J_{2m+1}.

Si tous les

$$\left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)$$

étaient positifs, c'est à dire si tous les λ_i étaient plus petits que 1, nous pourrions affirmer que J_{2m+1} est toujours positif. C'est ce qui arrive pour la sphère, mais on ne saurait affirmer qu'il en soit toujours ainsi.

Les inégalités:

$$\frac{J_2}{J_0} < \frac{J_4}{J_2} < \ldots < 1$$

résultent également des formules. Quant à la limite de $\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}}$ pour m infini, c'est la plus grande des quantités

$$\left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^2,$$

lesquelles quantités sont essentiellement plus petites que 1.

En rattachant ainsi à des considérations qui ne reposent que sur de fragiles aperçus, des conséquences que je suis parvenu par une autre voie à démontrer rigoureusement, j'ai voulu simplement faire comprendre quelle a été la marche de ma pensée et comment j'ai été conduit au résultat.

Mais on peut se poser le problème d'une autre manière; peut-on s'appuyer sur les différentes propositions établies au début de ce travail pour démontrer l'existence des fonctions fondamentales.

Je n'ai pu encore y réussir, mais il est évident qu'on peut tenter de le faire par des procédés analogues à celui que j'ai employé dans

mon mémoire sur les équations de la physique mathématique inséré aux Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1894).

Considérons le développement

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \dots.$$

D'après ce que nous avons vu, ce développement converge à l'intérieur d'un cercle de centre o et de rayon plus grand que 1. Il définit à l'intérieur de ce cercle un élément de fonction $\varphi(\lambda)$, et on peut définir cette fonction $\varphi(\lambda)$ en dehors de ce cercle par le procédé de la continuation analytique.

Etudions cette fonction $\varphi(\lambda)$.

Je dis d'abord qu'elle doit être uniforme; si en effet elle ne l'était pas, il existerait pour une même valeur de λ, deux potentiels W_1 et W_2 qui satisferaient à la fois à la condition (1) de sorte qu'on aurait:

$$V_1 - V_1' = \lambda(V_1 + V_1') + 2\Phi,$$

$$V_2 - V_2' = \lambda(V_2 + V_2') + 2\Phi.$$

De plus cela devrait avoir lieu pour toutes les valeurs de λ comprises à l'intérieur d'un certain domaine; cela aurait donc lieu pour des valeurs imaginaires de λ et pas seulement pour des valeurs réelles.

Si je pose

$$W = W_1 - W_2$$

on aura

$$V - V' = \lambda(V + V') \quad \text{ou} \quad V' = V\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

et comme W est le potentiel d'une double couche:

$$\frac{dV'}{dn} = \frac{dV}{dn}.$$

Soit maintenant φ une fonction qui soit égale à W à l'intérieur de S et à:

$$W\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

à l'extérieur; on aura

$$\varphi = \varphi'$$

ce qui montre que φ est le potentiel d'une simple couche. Il vient ensuite:

$$\frac{d\varphi'}{dn} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\frac{d\varphi}{dn}$$

ce qui montre que φ est une fonction fondamentale; mais comme nous l'avons vu cela ne peut avoir lieu que si le multiplicateur $\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ est réel. Cette circonstance ne peut donc pas se produire pour des valeurs imaginaires de λ.

C. Q. F. D.

Diverses analogies me portent à penser que la fonction $\varphi(\lambda)$ ne peut avoir de points singuliers que sur l'axe des quantités réelles; mais on peut supposer que ces points singuliers sont des pôles ou bien des points singuliers essentiels, ou bien qu'ils forment des lignes singulières.

Nous allons voir comment ces diverses hypothèses se rattachent à celles que l'on peut faire au sujet des quantités que nous avons appelées m_p' et M_p' au chapitre II.

Supposons d'abord que les quantités λ_i forment une seule série telle que:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

$$\lim \lambda_p = A \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

C'est là l'hypothèse la plus simple et celle que d'après certaines analogies nous avons adoptée jusqu'ici.

Reprenons alors la formule

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_0^2\lambda_0 + A_1^2\lambda_1 + \dots}{A_0^2\lambda_0^2 + A_1^2\lambda_1^2 + \dots}$$

relative à une double couche: J'observe d'abord que λ_0 étant nul cette formule peut s'écrire:

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_1^2\lambda_1 + \dots}{A_1^2\lambda_1^2 + \dots}.$$

Si nous posons (Cf. chapitre II, § 1 et 2)

(2) $$W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \dots + \alpha_p W_p$$

les W_i étant des potentiels de doubles couches données et les α des coëfficients arbitraires, nous pourrons disposer des α de façon à faire disparaitre les coëfficients

$$A_0,\ A_1,\ \ldots\ldots\ A_{p-2},$$

de sorte que nous aurons:

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_{p-1}^2 \lambda_{p-1} + \ldots}{A_{p-1}^2 \lambda_{p-1}^2 + \ldots}$$

d'où:

$$\frac{J}{J'} \leq \frac{1}{\lambda_{p-1}}.$$

On a donc:

$$M'_p = \frac{1}{\lambda_{p-1}}.$$

Pour calculer m'_p supposons que dans la formule (2) on détermine les W_i de façon qu'à l'intérieur de S

$$W_1 = \Phi_{q+1}, \qquad W_2 = \Phi_{q+2}, \quad \ldots\ldots \quad W_p = \Phi_{q+p},$$

il vient:

$$\frac{J}{J'} = \frac{\alpha_1^2 \lambda_{q+1} + \alpha_2^2 \lambda_{q+2} + \ldots + \alpha_p^2 \lambda_{q+p}}{\alpha_1^2 \lambda_{q+1}^2 + \alpha_2^2 \lambda_{q+2}^2 + \ldots + \alpha_p^2 \lambda_{q+p}^2}$$

d'où:

$$R'_1 = \frac{1}{\lambda_{q+1}}.$$

Donc R'_1 est toujours plus grand que $\frac{1}{\Delta}$ et on peut prendre q assez grand pour qu'il diffère aussi peu qu'on le veut de $\frac{1}{\Delta}$.

On a donc:

$$m'_p = \frac{1}{\Delta}.$$

Mais on peut encore faire d'autres hypothèses; on peut supposer que les λ_i au lieu de former une seule série en forment deux ou trois.

Ceux de la 1ère série satisfont aux conditions

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,$$

$$\lim \lambda_p = A \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

Ceux de la 2e série satisfont aux conditions

$$0 = \lambda'_1 > \lambda'_2 > \ldots.$$

$$\lim \lambda'_p = A' \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

On a d'ailleurs:

$$A \leqq A'.$$

Si $A < A'$ on peut supposer encore qu'il existe une troisième série de quantités analogues aux λ_i et qui sont toutes comprises entre A et A'.

Dans ce cas on a:

$$M'_p = \frac{1}{\lambda_{p-1}}, \qquad m'_p = \frac{1}{\lambda'_p}.$$

Si d'une manière quelconque, par exemple en perfectionnant les procédés du chapitre II, on parvenait à démontrer que

$$\lim m'_p = M'_p \quad \text{pour} \quad p = \infty$$

on pourrait pas les procédés de mon mémoire des Rendiconti cité plus haut, démontrer les résultats suivants:

La fonction $\varphi(\lambda)$ n'a que des pôles et un seul point singulier essentiel qui est rejeté à l'infini si l'on suppose

$$\lim m'_p = \lim M'_p = 1.$$

Si l'on considère un de ces pôles, le résidu correspondant regardé comme fonction de x, y et z est une fonction fondamentale.

CHAPITRE VII.

La méthode de Robin.

§ 1. *La méthode de Robin et les fonctions fondamentales.*

M. Robin a récemment imaginé une méthode qui permet de résoudre le problème de la distribution électrique, et qui semble d'abord, comme celle de Neumann, n'être applicable qu'aux surfaces convexes.

Il peut être intéressant de voir comment cette méthode se rattache aux considérations précédentes.

Admettons d'abord l'existence des fonctions fondamentales et la possibilité des développements en séries dont il a été question dans le chapitre précédent.

Soit W le potentiel d'une *simple* couche satisfaisant à la condition suivante

$$\frac{dV}{dn} - \frac{dV'}{dn} = \lambda\left(\frac{dV}{dn} + \frac{dV'}{dn}\right) + 2\Phi. \tag{1}$$

Si nous cherchons à développer W suivant les puissances de λ, de sorte que

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots \tag{2}$$

il viendra:

$$\frac{dV_0}{dn} - \frac{dV_0'}{dn} = 2\Phi,$$

$$\frac{dV_1}{dn} - \frac{dV_1'}{dn} = \frac{dV_0}{dn} + \frac{dV_0'}{dn},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

ce qui montre que W_0 est le potentiel d'une simple couche de densité $\frac{-\Phi}{2\pi}$. W_1 le potentiel d'une simple couche de densité

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV_0}{dn} + \frac{dV_0'}{dn}\right)$$

etc.

Supposons maintenant que Φ soit développable en série sous la forme:

$$\Phi = C_0 \frac{d\Phi'_0}{dn} + C_1 \frac{d\Phi'_1}{dn} + \dots.$$

Soit ensuite

$$W = A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + \dots$$

d'où:

$$\frac{dV}{dn} = \sum A_i \frac{d\Phi'_i}{dn}, \qquad \frac{dV'}{dn} = -\sum A_i \lambda_i \frac{d\Phi'_i}{dn}.$$

de sorte que la relation (1) devient:

$$-\sum A_i \frac{d\Phi'_i}{dn}(1 + \lambda_i) = \lambda \sum A_i \frac{d\Phi'_i}{dn}(1 - \lambda_i) + 2 \sum C_i \frac{d\Phi'_i}{dn}$$

d'où:

$$A_i = \frac{-2C_i}{(1 + \lambda_i) + \lambda(1 - \lambda_i)}.$$

On a donc:

$$W = -2 \sum \frac{C_i \Phi_i}{(1 + \lambda_i) + \lambda(1 - \lambda_i)}$$

et par conséquent:

$$W_m = -2 \sum \frac{C_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1}\right)^m$$

ou:

$$(-1)^{m+1} W_m = \sum \frac{2 C_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^m;$$

Quand m croît indéfiniment, tous les facteurs

$$\left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^m$$

tendent vers 0 à l'exception du facteur

$$\left(\frac{1 - \lambda_0}{1 + \lambda_0}\right)^m$$

qui reste égal à 1. On a donc pour $m = \infty$

$$\lim (-1)^{m+1} W_m = 2 C_0 \Phi_0.$$

On voit donc que si m est très grand W_m diffère très peu du potentiel d'une simple couche dont la densité est proportionnelle à celle de l'électricité en équilibre sur la surface S.

C'est là le principe de la méthode de Robin.

Rapprochons-le du principe de la méthode de Neumann.

Pour le potentiel d'une double couche satisfaisant à la condition:

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi$$

nous avons trouvé à l'intérieur de S:

$$W = \sum \frac{2C_i \Phi_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}$$

d'où:

$$W_m = \sum \frac{2C_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^m.$$

A l'extérieur de S, C_i doit être remplacé par $-C_i\lambda_i$.

On a donc pour $m = \infty$ à l'intérieur de S

$$\lim W_m = 2C_0 \Phi_0 = \text{const.}$$

et à l'extérieur de S

$$\lim W_m = -2C_0\lambda_0 \Phi_0 = 0.$$

De ces deux formules, il serait aisé de déduire tous les théorèmes de Neumann.

Revenons à la méthode de Robin. Si nous supposons que la fonction Φ donnée qui figure dans la relation (1) soit telle que $C_0 = 0$, c'est à dire telle que

$$\int \Phi d\omega = 0,$$

on a pour m infini:

$$\lim W_m = 0.$$

On voit de plus que la série

$$W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots$$

converge pour

$$|\lambda| < 1.$$

Or pour $\lambda = 1$ la relation (1) devient:

$$\frac{dV'}{dn} = -\Phi.$$

Pour $\lambda = -1$, elle devient:

$$\frac{dV}{dn} = \Phi.$$

On voit donc que la méthode de Robin permet de trouver une fonction harmonique soit à l'extérieur de S, soit à l'intérieur de S, étant donnée la valeur de la dérivée $\frac{dV}{dn}$ en tous les points de S.

§ 2. *La méthode de Robin et le problème de Neumann.*

Ce qui précède nous fait déjà prévoir que la méthode de Robin est applicable à toutes les surfaces simplement connexes. Mais l'aperçu du numéro précédent n'a aucun caractère de rigueur. Rapprochons donc d'une autre manière la méthode de Robin et celle de Neumann.

Soit w le potentiel d'une simple couche satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad \frac{dv}{dn} - \frac{dv'}{dn} = \lambda\left(\frac{dv}{dn} + \frac{dv'}{dn}\right) + 2\varphi.$$

Je pose d'ailleurs

$$w = w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \dots$$

Soit maintenant W le potentiel d'une double couche satisfaisant à

$$(2) \qquad V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi$$

et développable sous la forme

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \dots$$

Je suppose que la fonction φ soit donnée, nous calculerons $w_0, w_1, \dots$ par récurrence à l'aide des formules:

$$\frac{dv_0}{dn} - \frac{dv_0'}{dn} = 2\varphi,$$

$$\frac{dv_1}{dn} - \frac{dv_1'}{dn} = \frac{dv_0}{dn} + \frac{dv_0'}{dn},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nous savons que la méthode de Neumann, applicable à toutes les surfaces simplement connexes, nous permet de trouver une double couche dont le potentiel W satisfasse à la condition

$$V = \text{fonction donnée.}$$

Nous pourrons donc choisir W_0 de cette façon que

$$V_0 = v_0$$

d'où

$$W_0 = w_0 \quad \text{(à l'intérieur de } S\text{)}$$

et

$$\frac{dV_0}{dn} = \frac{dv_0}{dn}.$$

On calculera ensuite par récurrence W_1, W_2, etc. à l'aide des formules:

$$V_1 - V'_1 = V_0 + V'_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Posons

$$2u_0 = \frac{dv_0}{dn} + \frac{dv'_0}{dn}, \qquad 2U_0 = V_0 + V'_0,$$

et soient u'_0, U'_0 les valeurs de u_1 et U_1 au point x', y', z'; soit r la distance des points x, y, z, x', y', z'; conservons aux notations $d\omega'$ et $d\sigma'$ le même sens que plus haut; soient α', β', γ' les cosinus directeurs de $d\omega'$; soit enfin, pour une fonction quelconque f de x', y', z':

$$\frac{df}{dn'} = \alpha'\frac{df}{dx'} + \beta'\frac{df}{dy'} + \gamma'\frac{df}{dz'};$$

il viendra:

$$(3) \qquad w_1 = \int \frac{u'_0 d\omega'}{2\pi r}; \qquad W_1 = \int \frac{U'_0 d\sigma'}{2\pi} = \int \frac{U'_0 d\omega'}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}.$$

Tenons compte maintenant des relations:

$$V_0 = v_0 = v'_0, \qquad \frac{dV'_0}{dn} = \frac{dV_0}{dn} = \frac{dv_0}{dn}$$

d'où l'on déduit:

$$2u_0 = \frac{dV'_0}{dn} + \frac{dv'_0}{dn}, \qquad 2U_1 = v'_0 + V'_0.$$

Si donc nous posons à l'extérieur de S:

$$W_0 + w_0 = T$$

et si T' est la valeur de T au point x', y', z', on aura à la surface de S:

$$T' = 2U'_0; \qquad \frac{dT}{dn} = 2u'_0.$$

Or le théorème de Green nous donne quand le point x, y, z est intérieur à S:

$$\int \frac{dT'}{dn'} \frac{d\omega'}{r} = \int T' d\omega' \frac{d\frac{1}{r}}{dn}.$$

On aura donc à l'intérieur de S

$$W_1 = -w_1.$$

On trouverait de même par récurrence à l'intérieur de S:

$$W_2 = w_2, \qquad W_3 = -w_3, \quad \ldots.$$

Mais nous savons que la série:

$$(W_0 - 2C) + (W_1 - 2C) + \ldots + (W_m - 2C) + \ldots$$

converge absolument et uniformément si la constante C est convenablement choisie.

Il en sera donc de même à l'intérieur de S de la série

$$(w_0 - 2C) + (w_1 - 2C) + \ldots + (w_m - 2C) + \ldots.$$

Si

$$\int \varphi d\omega = 0,$$

la constante C est nulle.

Nous désignerons l'intégrale

$$\int \sum \frac{dw_m}{dx} \frac{dw_p}{dx} d\tau$$

par $j_{m.p}$ ou par $j'_{m.p}$ suivant qu'elle sera étendue à l'intérieur ou à l'extérieur de S.

On verrait comme au chapitre I que ces intégrales ne dépendent que de la somme des indices m et p, ce qui nous permettra de remplacer la notation $j_{m.p}, j'_{m.p}$ par la notation à un seul indice j_{m+p}, j'_{m+p}.

Nous trouverions ensuite

$$j_m + j'_m = j_{m-1} - j'_{m-1}.$$

De plus j_{2m}, j'_{2m} sont positifs et on peut assigner une limite supérieure et inférieure au rapport:

$$\frac{j_{2m}}{j'_{2m}}$$

pourvu que $\int \varphi d\omega = 0$ *et que par conséquent la simple couche qui engendre* w_m *ait sa masse totale nulle* (Cf. chapitre II, § 5).

On tirera donc de là les mêmes conclusions qu'en ce qui concerne la méthode de Neumann et on aura:

$$j_{2m} + j'_{2m} < BL^{2m}, \qquad (L < 1)$$

B étant un nombre donné.

Nous avons d'ailleurs:

$$j_{2m} = J_{2m} < AL^{2m}$$

et comme nous pouvons assigner une limite supérieure M au rapport

$$\frac{j_{2m}}{j_{2m}}.$$

nous aurons

$$j'_{2m} < AML^{2m}.$$

Nous savons que si les constantes C, D et L_1 $(L_1 < 1)$ sont convenablement choisies on aura:

$$|W_m - 2C| < DL_1^m.$$

On a donc à l'intérieur de S

$$|w - 2C| < DL_1^m.$$

Si

$$\int \varphi d\omega = 0,$$

la constante C est nulle et on aura à l'intérieur de S:

$$|w_m| < DL_1^m.$$

On aura donc sur S

$$|v_m| = |v'_m| < DL_1^m$$

et comme $|w_m|$ ne peut atteindre son maximum que sur S, on aura à l'extérieur de S

$$|w_m| < DL_1^m.$$

Donc la série

$$w_0 + \lambda w_1 + \ldots$$

converge absolument et uniformément pour $|\lambda| \leq 1$. *La méthode de Robin est donc comme celle de Neumann applicable à toutes les surfaces simplement connexes.*

Résumé.

Nous savons que la méthode dite du balayage permet de démontrer le principe de Dirichlet dans le cas général.

Mais si cette méthode est très-bonne comme procédé de démonstration, elle est inférieure comme procédé de calcul à celle de Neumann. Celle-ci malheureusement n'était jusqu'ici applicable qu'aux surfaces convexes.

En m'appuyant sur le principe de Dirichlet supposé démontré par la méthode de balayage, j'ai montré que la méthode de Neumann (de même que celle de Robin) conduit à la solution du problème de Dirichlet aux conditions suivantes:

1°. Si la surface S est simplement connexe.

2°. Si cette surface a partout un plan tangent et deux rayons de courbure principaux déterminés.

3°. Si la fonction donnée Φ a des dérivées de tous les ordres.

Toutes ces restrictions sont probablement inutiles et tout porte à penser que le théorème est vrai dans tous les cas. Mais je ne l'ai démontré qu'avec ces restrictions.

Après avoir établi ces résultats d'une façon rigoureuse, j'ai cru devoir dans les deux derniers chapitres, donner une idée des aperçus qui m'avaient d'abord conduit à les deviner. J'ai pensé que, malgré leur peu de rigueur, ils pouvaient être utiles comme procédés d'investigation, puisque je m'en étais déjà servi une fois avec succès.

PRIMITIVE WURZELN DER PRIMZAHLEN VON DER FORM $2^{\varkappa}q^{\lambda}+1$, IN WELCHER $q = 1$ ODER EINE UNGERADE PRIMZAHL IST

VON

G. WERTHEIM
in FRANKFURT a. M.

Wenn die Primzahl $p = 2^{\varkappa}q^{\lambda}\ldots r^{\mu}+1$ ist, wo $\varkappa, \lambda, \ldots, \mu$ ganze positive Zahlen, $q, \ldots, r$ von einander verschiedene ungerade Primzahlen bezeichnen, so ist bekanntlich die Zahl a eine primitive Wurzel von p, wenn keine der Congruenzen

$$x^2 \equiv a, \qquad x^q \equiv a\,, \quad \ldots\,, \quad x^r \equiv a \pmod{p}$$

möglich ist. Die Untersuchung, ob a primitive Wurzel von p sei oder nicht, wird sich also um so einfacher gestalten, je weniger ungleiche Primfactoren $p - 1$ enthält. Es sei nun

I. $$p = 2^{\varkappa} + 1.$$

In diesem Falle ist a primitive Wurzel von p, wenn die Congruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$ unmöglich, d. h. wenn a quadratischer Nichtrest von p ist. Wir denken uns jetzt die Zahlen der Form $2^{\varkappa}+1$ in folgender Weise geordnet:

$$\begin{array}{llll} 2^{1}+1\,, & 2^{3}+1\,, & 2^{5}+1\,, & \ldots \\ 2^{2}+1\,, & 2^{6}+1\,, & 2^{10}+1\,, & \ldots \\ 2^{4}+1\,, & 2^{12}+1\,, & 2^{20}+1\,, & \ldots \\ 2^{8}+1\,, & 2^{24}+1\,, & 2^{40}+1\,, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Da das erste Glied jeder dieser Horizontalreihen in jedes folgende Glied derselben Reihe ohne Rest aufgeht, so sind die Primzahlen der Form $2^x + 1$ nur unter den ersten Gliedern zu suchen; mit anderen Worten: Nur wenn x eine Potenz von 2 ist, kann $2^x + 1$ eine Primzahl sein. Dass aber nicht alle Zahlen $2^x + 1$, bei denen x eine Potenz von 2 ist, auch Primzahlen seien, wie Fermat vermuthet hatte, ist von Euler gezeigt worden.

Wenn wir jetzt von den beiden Primzahlen $2^1 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$, von denen die erste die primitive Wurzel 2, die zweite die primitiven Wurzeln 2 und 3 hat, absehen, so ergiebt sich Folgendes: Es ist congruent

	mod. 8	mod. 12	mod. 20	mod. 28	mod. 44	mod. 52	...
2^4	0	4	16	16	16	16	...
2^8	0	4	16	4	36	48	...
2^{16}	0	4	16	16	20	16	...
2^{32}	0	4	16	4	4	48	...
.	.	.	.	.	.	.	.

Folglich haben die Primzahlen $2^x + 1$, $x > 3$ die Formen $8k + 1$; $12k + 5$; $20k + 17$; $28k + 5, 17$; $44k + 5, 17, 21, 37$; $52k + 17, 49$; .... und da 2 quadratischer Rest der Primzahlen $8k + 1$, 3 Nichtrest der Primzahlen $12k + 5$, 5 Nichtrest der Primzahlen $20k + 17$, 7 Nichtrest der Primzahlen $28k + 5, 17$, ferner 13 Rest der Primzahlen $52k + 17, 49$ ist, während 11 Rest der Primzahlen $44k + 5, 37$, Nichtrest der Primzahlen $44k + 17, 21$ ist, so erhalten wir den Satz:

Die Zahlen 3, 5, 7 sind primitive Wurzeln aller Primzahlen $2^x + 1$, $x > 3$; die Zahlen 2 und 13 sind für keine derselben primitive Wurzeln; die Zahl 11 endlich ist primitive Wurzel derjenigen dieser Primzahlen, bei denen x eine gerade Potenz von 2 ist; wenn x eine ungerade Potenz von 2 ist, so ist 11 keine primitive Wurzel.

Unter 10000 liegen nur 4 Primzahlen der Form $2^x + 1$, nämlich 3, 5, 17, 257.

Weiter sei

II. $$p = 2^\varkappa q^\lambda + 1;$$

dann ist die Zahl a primitive Wurzel von p, wenn sie Nichtrest von p und wenn zugleich die Congruenz

$$x^q \equiv a, \quad \text{also auch} \quad x^{q \cdot 2^\varkappa q^{\lambda-1}} \equiv a^{2^\varkappa q^{\lambda-1}} \pmod{p}$$

unmöglich ist. Nach dem Fermat'schen Satze ist aber

$$x^{q \cdot 2^\varkappa q^{\lambda-1}}, \quad \text{d. i.} \quad x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p};$$

also muss, wenn a primitive Wurzel sein soll, auch die Congruenz

$$a^{2^\varkappa q^{\lambda-1}} \equiv 1, \quad \text{d. i.} \quad (a^{2^{\varkappa-1} q^{\lambda-1}} - 1)(a^{2^{\varkappa-1} q^{\lambda-1}} + 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

unmöglich sein.

Wenn nun $\lambda > 1$ ist, so kann die Frage, ob der Nichtrest a primitive Wurzel von p sei oder nicht, nur dadurch entschieden werden, dass man den Rest der Potenz $a^{2^{\varkappa-1} q^{\lambda-1}} \pmod{p}$ bildet; wenn derselbe weder $+1$ noch -1 ist, so ist a primitive Wurzel, sonst nicht.

Beispiel. Es sei $p = 3457 = 2^7 \cdot 3^3 + 1$, so ist $2^{\varkappa-1} q^{\lambda-1} = 2^6 \cdot 3^2 = 576$. Nun sind $2, 3, 6$ Reste von 3457; weiter ergiebt sich $5^{576} \equiv -1$, aber $7^{576} \equiv -1520 \pmod{3457}$; somit ist 7 die kleinste primitive Wurzel von 3457.

Unter 10000 liegen 27 Primzahlen der Form $2^\varkappa q^\lambda + 1$, $\lambda > 1$, deren kleinste primitive Wurzeln auf die dargelegte Weise leicht bestimmt werden können.

Weit einfacher gestaltet sich die Sache, wenn $\lambda = 1$, also $q^{\lambda-1} = 1$ ist. In diesem Falle entnehmen wir aus dem oben erhaltenen Resultat den Satz:

Die Zahl a ist primitive Wurzel der Primzahl $p = 2^\varkappa q + 1$, wenn sie Nichtrest von p und wenn zugleich $a^{2^\varkappa} - 1$ nicht durch p teilbar ist.

Dieser Satz soll jetzt auf besondere Fälle angewendet werden.

1) Es sei $\varkappa = 1$, also $p = 2q + 1$.

Je nachdem dann $q = 4k + 1$ oder $= 4k + 3$ ist, ist $p = 8k + 3$ oder $= 8k + 7$. Da nun die Zahl $a = 2$ Nichtrest von $p = 8k + 3$, dagegen Rest von $8k + 7$ ist, da ausserdem $2^2 - 1 = 3$ durch keine Primzahl $p = 2q + 1$, $q > 1$ teilbar ist, so erhalten wir das Resultat:

Die Zahl 2 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $p = 2q + 1$, bei denen die ungerade Primzahl q die Form $4k + 1$ hat; wenn $q = 4k + 3$ ist, so ist 2 keine primitive Wurzel von p.

Um weiter zu untersuchen, für welche Primzahlen $p = 2q + 1$ die Zahl $a = 3$ primitive Wurzel ist, erwägen wir, dass q entweder $= 3$ oder von einer der beiden Formen $6k \pm 1$ ist. Für $q = 3$ ist $p = 7$, und für diese Zahl ist 3 primitive Wurzel. Die Annahme $q = 6k + 1$ würde $p = 12k + 3$, also zusammengesetzte Zahlen liefern und ist daher unzulässig. Wenn endlich $q = 6k - 1$ ist, so ergiebt sich $p = 12k - 1$, und da 3 Rest der Primzahlen dieser Form ist, so erhalten wir den Satz:

Die Zahl 3 ist primitive Wurzel von 7; für alle anderen Primzahlen $p = 2q + 1$ ist sie es nicht.

Durch ähnliche Schlüsse und unter Berücksichtigung der Werte

$$5^2 - 1 = 24, \quad 6^2 - 1 = 35, \quad 7^2 - 1 = 48, \quad 10^2 - 1 = 99,$$
$$11^2 - 1 = 120, \quad 13^2 - 1 = 168, \quad \ldots$$

gelangt man zu den Sätzen:

5 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $2q + 1$, bei denen q eine Primzahl einer der beiden Formen $10k + 1, 3$ ist.

6 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $2q + 1$, bei denen q eine Primzahl der Form $4k + 1$ ist.

7 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $2q + 1$, bei denen q eine Primzahl einer der beiden Formen $14k + 5, 11$ ist.

10 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $2q + 1$, bei denen q eine Primzahl einer der drei Formen $20k + 3, 9, 11$ ist.

11 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $2q + 1$, bei denen q eine Primzahl einer der Formen $22k + 1, 7, 13, 15$ ist; ausserdem ist 11 primitive Wurzel von 23.

13 *ist primitive Wurzel aller Primzahlen* $2q + 1$, *bei denen* q *eine Primzahl einer der Formen* $26k + 3, 5, 7, 9, 15, 23$ *ist. Ausnahme* $p = 7$.

Diese Sätze, denen sich leicht andere anreihen lassen, liefern für 113 von den 114 unter 10000 liegenden Primzahlen $2q + 1$ die kleinsten primitiven Wurzeln; die eine noch übrig bleibende Primzahl 2999 hat 17 als kleinste primitive Wurzel.

Ist

2) $$\varkappa = 2, \text{ also } p = 4q + 1,$$

so wird, je nachdem $q = 4k + 1$ oder $4k + 3$ ist, p die Form $16k + 5$ oder $16k + 13$ haben, und da 2 Nichtrest der Primzahlen dieser Form ist, da überdies $2^4 - 1 = 15$ durch keine Primzahl $4q + 1$, $q > 1$ teilbar ist, so ergiebt sich der Satz:

Die Zahl 2 *ist primitive Wurzel aller Primzahlen* $4q + 1$, *bei denen* q *eine ungerade Primzahl ist.*

Indem wir diese Schlüsse fortsetzen und beachten, dass $3^4 - 1 = 80$, $6^4 - 1 = 1295 = 5 \cdot 7 \cdot 37$, $7^4 - 1 = 2400$, $10^4 - 1 = 9999 = 9 . 11 . 101$, $11^4 - 1 = 14640 = 2^4 . 3 . 5 . 61$, $13^4 - 1 = 28560 = 2^4 . 3 . 5 . 7 . 17$ durch keine Primzahl der betrachteten Form teilbar sind, dass aber $5^4 - 1 = 624$ den Factor 13 enthält, erhalten wir die Sätze:

3 *ist primitive Wurzel aller Primzahlen* $4q + 1$ *mit Ausnahme der Zahl* 13.

5 *ist primitive Wurzel aller Primzahlen* $4q + 1$, *bei denen* q *eine Primzahl einer der Formen* $10k + 3, 9$ *ist; eine Ausnahme macht nur die Zahl* 13.

6 *ist primitive Wurzel von* 13; *für alle anderen Primzahlen* $4q + 1$ *ist* 6 *keine primitive Wurzel.*

7 *ist primitive Wurzel aller Primzahlen* $4q + 1$, *bei denen* q *eine Primzahl einer der Formen* $14k + 1, 3, 11$ *ist.*

10 *ist primitive Wurzel der Primzahlen* $4q + 1$, *bei denen* q *eine Primzahl der Form* $10k + 7$ *ist.*

11 *ist primitive Wurzel der Primzahlen* $4q + 1$, *bei denen* q *eine Primzahl einer der Formen* $22k + 3, 5, 7, 15, 21$ *ist.*

Unter 10000 liegen 59 Primzahlen der vorstehend betrachteten Form.

Wenn endlich

3) $\varkappa > 2$ ist, so hat $p = 2^\varkappa q + 1$ die Form $8k + 1$, und da 2 Rest der Primzahlen dieser Form ist, so erhalten wir den Satz:

Die Zahl 2 ist für keine Primzahl $2^\varkappa q + 1$, $\varkappa > 2$ primitive Wurzel.

Ebenso liefert eine einfache Anwendung des Reciprocitätssatzes das Resultat:

Für die Primzahlen $2^\varkappa q + 1$, $\varkappa > 2$ kann weder q noch $2q$ primitive Wurzel sein.

Danach ist z. B. weder 3 noch 6 primitive Wurzel der Primzahlen $2^\varkappa . 3 + 1$, weder 5 noch 10 primitive Wurzel der Primzahlen $2^\varkappa . 5 + 1$, u. s. w.

Untersuchen wir jetzt, für welche Primzahlen $2^\varkappa q + 1$, $\varkappa > 2$ die Zahl 3 primitive Wurzel sei. Da der Fall $q = 3$ soeben erledigt worden ist, so haben wir nur $q = 6k \pm 1$ vorauszusetzen. Für diese Werthe wird

$$p = 2^\varkappa . 6k \pm 2^\varkappa + 1 \equiv \pm 2^\varkappa + 1 \pmod{12}.$$

Nun ist aber, da $\varkappa > 2$ vorausgesetzt wird,

$$2^\varkappa \equiv 4 \text{ oder } 8 \pmod{12},$$

folglich wird, wenn das obere Zeichen genommen wird, $p \equiv 5$ oder 9 und für das untere Zeichen $p \equiv -3$ oder -7, das ist $\equiv 9$ oder 5 (mod. 12) sein. Da nun p eine Primzahl sein soll, so ist der Rest 9 ausgeschlossen; folglich hat *jede* Primzahl $2^\varkappa q + 1$, $\varkappa > 2$, $q > 3$ die Form $12k + 5$, also 3 zum Nichtrest.

Die Zahl 3 ist daher primitive Wurzel aller Primzahlen $2^\varkappa q + 1$, $\varkappa > 2$, $q > 3$, welche nicht in $3^{2^\varkappa} - 1$ aufgehen. Es ist aber $3^8 - 1 = 2^5.5.41$ und $3^{16} - 1 = 2^6.5.17.41.193$. Daraus ergeben sich die Sätze:

3 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $8q + 1$, mit Ausnahme der Zahl 41.

3 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $16q + 1$.

Ebenso ist 3 primitive Wurzel aller Primzahlen $32q + 1$, welche nicht in $3^{32} - 1$ aufgehen, aller Primzahlen $64q + 1$, welche nicht in

$3^{64} - 1$ aufgehen, u. s. w. Um die (praktisch unausführbare) Zerlegung dieser Ausdrücke in Faktoren oder die Division derselben durch alle in Betracht kommenden Primzahlen des Gebiets, auf welches man sich beschränkt, zu vermeiden, berechnet man am besten die Potenzreste von 3 für jede dieser Primzahlen p bis zu $3^{2^{\frac{1}{2}\varphi(p-1)}}$. Wenn dies die niedrigste Potenz ist, welche den Rest -1 liefert, so ist 3 primitive Wurzel von p, sonst nicht. Auf diese Weise habe ich mich überzeugt, dass für das Zahlengebiet bis zu 10000 alle Primzahlen $2^\varkappa q + 1$, $\varkappa > 2$, $q > 3$ in der That die primitive Wurzel 3 haben.

Anmerkung. $3^{2^\varkappa} - 1 = (3^{2^{\varkappa-1}} + 1)(3^{2^{\varkappa-1}} - 1)$ wird durch die Primzahl $p = 2^\varkappa q + 1$ sicherlich nicht teilbar sein, wenn

$$2^\varkappa q + 1 > 3^{2^{\varkappa-1}} + 1, \quad \text{also} \quad q > \frac{3^{2^{\varkappa-1}}}{2^\varkappa}$$

ist. Unter dieser Bedingung ist also 3 primitive Wurzel von p. Dieser von TSCHEBYSCHEFF (*Theorie der Congruenzen,* deutsch von SCHAPIRA, S. 311) angegebene Grenzwert ist aber nur für $\varkappa = 3$ von Nutzen; er liefert dann $q > \frac{3^4}{2^3}$, d. i. $q > 10$. Für $\varkappa = 4$ wird derselbe $q > 410$; von den 17 unter 10000 liegenden Primzahlen $16q + 1$ würden also nur die 4 letzten 7793, 8369, 8753, 9137 unter den Satz fallen, die 13 ersten nicht. Für $\varkappa = 5$ ist der Grenzwert $q > 1345210$, für $\varkappa = 6$, u. s. w. noch weit grösser. Dieser Grenzwert hat also praktisch gar keine Bedeutung.

Es sei jetzt $a = 5$. Da der Fall $q = 5$ oben schon erledigt ist, so sind nur die Formen

$$q = 10k + 1\,,\ 3\,,\ 7\,,\ 9$$

ins Auge zu fassen, denen die Werte

$$p = 10 . 2^\varkappa . k + (2^\varkappa + 1)\,, (3 . 2^\varkappa + 1)\,, (7 . 2^\varkappa + 1)\,, (9 . 2^\varkappa + 1)$$

entsprechen. Je nachdem nun

$$(\varkappa > 2) \equiv 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3 \pmod{4}$$

ist, wird (mod. 10)

$$2^\varkappa \equiv 6\,,\ 2\,,\ 4\,,\ 8,$$

also

$$
\begin{aligned}
2^{\varkappa} + 1 &\equiv 7\,,\,3\,,\,5\,,\,9, \\
3 \cdot 2^{\varkappa} + 1 &\equiv 9\,,\,7\,,\,3\,,\,5, \\
7 \cdot 2^{\varkappa} + 1 &\equiv 3\,,\,5\,,\,9\,,\,7, \\
9 \cdot 2^{\varkappa} + 1 &\equiv 5\,,\,9\,,\,7\,,\,3
\end{aligned}
$$

sein, und da 5 Nichtrest der Primzahlen $10k + 3\,,\,7$, Rest der Primzahlen $10k + 1\,,\,9$ ist, so erhalten wir das Resultat:

Die Zahl 5 ist Nichtrest der Primzahlen

$2^{4\lambda}q + 1$, wenn die Primzahl q eine der Formen $10k + 1\,,\,7$ hat.
$2^{4\lambda+1}q + 1$, » » » q » » » $10k + 1\,,\,3$ »
$2^{4\lambda+2}q + 1$, » » » q » » » $10k + 3\,,\,9$ »
$2^{4\lambda+3}q + 1$, » » » q » » » $10k + 7\,,\,9$ »

Zur Entscheidung der Frage, ob die Zahl 5 primitive Wurzel derjenigen Primzahlen $2^{\varkappa}q + 1$ sei, deren Nichtrest sie ist, hat man dann noch die Ausdrücke

$$5^8 - 1 = 2^5.3.13.313, \qquad 5^{16} - 1 = 2^6.3.13.17.313.11489, \quad \ldots$$

zu prüfen und, wenn dies unmöglich ist, die Potenzreste von 5 selbst zu bilden. Im besonderen erhält man die Sätze:

5 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $8q + 1$, wenn q eine Primzahl einer der Formen $10k + 7\,,\,9$ ist.

5 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $16q + 1$, wenn q eine Primzahl einer der Formen $10k + 1\,,\,7$ ist.

Weiter sei $a = 6$. Da 2 Rest, 3 Nichtrest aller Primzahlen $2^{\varkappa}q + 1$, $\varkappa > 2$, $q > 3$ ist, so ist 6 Nichtrest derselben. Nun ist

$$6^8 - 1 = 5.7.37.1297, \qquad 6^{16} - 1 = 5.7.17.37.1297.98801,$$

somit 6 *primitive Wurzel aller Primzahlen $8q + 1$ und $16q + 1$.* Was die Primzahlen $32q + 1\,,\,64q + 1\,,\ldots$ betrifft, so ist die Frage in der oben dargelegten Weise zu entscheiden.

Für $a = 7$ sind die Fälle

$$q = 14k + 1\,,\ 3\,,\ 5\,,\ 9\,,\ 11\,,\ 13$$

zu betrachten, denen die Werte

$$p = 14.2^\varkappa k + (2^\varkappa + 1), (3.2^\varkappa + 1), (5.2^\varkappa + 1), (9.2^\varkappa + 1), (11.2^\varkappa + 1), (13.2^\varkappa + 1)$$

entsprechen. Je nachdem nun

$$\varkappa \equiv 0\,,\ 1\,,\ 2 \pmod{3}$$

ist, wird mod. 28

$$2^\varkappa \equiv 8\,,\ 16\,,\ 4,$$

also

$$\begin{aligned} 2^\varkappa + 1 &\equiv 9\,,\ 17\,,\ 5, \\ 3.2^\varkappa + 1 &\equiv 25\,,\ 21\,,\ 13, \\ 5.2^\varkappa + 1 &\equiv 13\,,\ 25\,,\ 21, \\ 9.2^\varkappa + 1 &\equiv 17\,,\ 5\,,\ 9, \\ 11.2^\varkappa + 1 &\equiv 5\,,\ 9\,,\ 17, \\ 13.2^\varkappa + 1 &\equiv 21\,,\ 13\,,\ 25 \end{aligned}$$

sein, und da 7 Nichtrest der Primzahlen $28k + 5\,,\ 11\,,\ 13\,,\ 15\,,\ 17\,,\ 23$, Rest der übrigen ist, so erhalten wir das Resultat:

Die Zahl 7 ist Nichtrest der Primzahlen

$2^{3\lambda} q + 1$, wenn die Primzahl q von einer der Formen $14k + 5, 9, 11$ ist.
$2^{3\lambda+1} q + 1$, » » » q » » » » $14k + 1, 9, 13$ »
$2^{3\lambda+2} q + 1$, » » » q » » » » $14k + 1, 3, 11$ »

Zur Entscheidung der Frage, ob 7 primitive Wurzel derjenigen dieser Primzahlen sei, deren Nichtrest sie ist, sind dann noch die Ausdrücke

$$7^8 - 1 = 2^6 . 3 . 5^2 . 1201, \qquad 7^{16} - 1 = 2^7 . 3 . 5^2 . 11 . 13 . 29 . 683 . 1201$$

zu betrachten und weiter die Potenzreste von 7 selbst zu bilden. Im besonderen erhält man die Sätze:

7 ist primitive Wurzel der Primzahlen $8q+1$, wenn die Primzahl q von einer der Formen $14k+5, 9, 11$ ist, und der Primzahlen $16q+1$, wenn q eine der Formen $14k+1, 9, 13$ hat.

Die Zahl $a = 10$ ist in Beziehung auf die hier betrachteten Primzahlen $2^{x}q+1$ von demselben quadratischen Character wie 5, und da

$$10^{8}-1 = 3^{2}.11.73.101.137, \qquad 10^{16}-1 = (10^{8}-1).17.5882353$$

ist, so ergeben sich die Sätze:

10 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $8q+1$, bei denen q eine Primzahl einer der beiden Formen $10k+7, 9$ ist; eine Ausnahme macht nur die Zahl 137.

10 ist primitive Wurzel aller Primzahlen $16q+1$, bei denen q eine Primzahl einer der beiden Formen $10k+1, 7$ ist.

L'Éditeur de ce Journal remplit un devoir qui lui tient au coeur, en exprimant sa plus profonde gratitude envers les illustres géomètres ses maîtres vénérés, les collaborateurs des Acta, leurs lecteurs, tous les amis auxquels l'attache la sympathie scientifique, qui se sont réunis pour lui faire le don de son portrait, à l'occasion du 50:me anniversaire de sa naissance.

Ce présent d'un prix inestimable, et l'adresse qui l'accompagne, sont au delà de ce qu'il pouvait attendre, la récompense et l'honneur de sa carrière.

Il ne lui est possible d'acquitter sa dette de reconnaissance qu'en redoublant de zèle, dans la direction du Journal; il y consacrera tous ses soins, tous ses efforts avec le plus complet et le plus absolu dévouement.

TABELLE DER KLEINSTEN PRIMITIVEN WURZELN g ALLER PRIMZAHLEN p ZWISCHEN 3000 UND 5000.

(Fortsetzung der Tabelle aus Band 17, Seite 315)

VON

G. WERTHEIM
in FRANKFURT a. M.

Vorbemerkung. Als die vorliegende Arbeit schon nahezu abgeschlossen war, habe ich durch einen an den Herausgeber dieser Zeitschrift gerichteten Brief des Herrn Prof. STICKELBERGER erfahren, dass REUSCHLE im Stuttgarter Gymnasialprogramm von 1856 schon eine Tabelle der primitiven Wurzeln für die Primzahlen unter 5000 gegeben hat. Wenn ich im Einverständniss mit der Redaction trotzdem meine Tabelle veröffentliche, so geschieht das, weil REUSCHLE's Arbeit wenig bekannt geworden und jetzt schwer erhältlich ist, dann aber auch, weil REUSCHLE irgend welche, häufig recht grosse primitive Wurzeln giebt, während ich immer die kleinsten berechnet habe. Selbstverständlich habe ich meine Resultate, soweit es möglich war, mit denen von REUSCHLE verglichen und dadurch einige Fehler berichtigen können. Dagegen sind bei den Zahlen

3221, 3251, 3301, 3361, 3739, 3881, 4099, 4231, 4729, 4969

meine Angaben die richtigen.

Jede Primzahl, für welche 10 primitive Wurzel ist, ist mit dem Zeichen * versehen.

p	p − 1	g	p	p − 1	g	p	p − 1	g
3001	$2^3.3.5^3$	14	3329	$2^8.13$	3	3623*	2.1811	5
3011*	2.5.7.43	2	3331*	$2.3^2.5.37$	3	3631	$2.3.5.11^2$	21
3019*	2.3.503	2	3343*	2.3.557	5	3637	$2^2.3^2.101$	2
3023*	2.1511	5	3347	2.7.239	2	3643	2.3.607	2
3037	$2^2.3.11.23$	2	3359	2.23.73	11	3659*	2.31.59	2
3041	$2^5.5.19$	3	3361	$2^5.3.5.7$	22	3671	2.5.367	13
3049	$2^3.3.127$	11	3371*	2.5.337	2	3673*	$2^3.3^3.17$	5
3061	$2^2.3^2.5.17$	6	3373	$2^2.3.281$	5	3677	$2^2.919$	2
3067	2.3.7.73	2	3389*	$2^2.7.11^2$	3	3691	$2.3^2.5.41$	2
3079	$2.3^4.19$	6	3391	2.3.5.113	3	3697	$2^4.3.7.11$	5
3083	2.23.67	2	3407*	2.13.131	5	3701*	$2^2.5^2.37$	2
3089	$2^4.193$	3	3413	$2^2.853$	2	3709*	$2^2.3^2.103$	2
3109	$2^2.3.7.37$	6	3433*	$2^3.3.11.13$	5	3719	$2.11.13^2$	7
3119	2.1559	7	3449	$2^3.431$	3	3727*	$2.3^4.23$	3
3121	$2^4.3.5.13$	7	3457	$2^7.3^3$	7	3733	$2^2.3.311$	2
3137*	$2^6.7^2$	3	3461*	$2^2.5.173$	2	3739	2.3.7.89	7
3163	2.3.17.31	3	3463*	2.3.577	3	3761	$2^4.5.47$	3
3167*	2.1583	5	3467	2.1733	2	3767*	2.7.269	5
3169	$2^5.3^2.11$	7	3469*	$2^2.3.17^2$	2	3769	$2^3.3.157$	7
3181	$2^2.3.5.53$	11	3491	2.5.349	2	3779*	2.1889	2
3187	$2.3^3.59$	2	3499	2.3.11.53	2	3793	$2^4.3.79$	5
3191	2.5.11.29	17	3511	$2.3^3.5.13$	7	3797	$2^2.13.73$	2
3203	2.1601	2	3517	$2^2.3.293$	2	3803	2.1901	2
3209	$2^3.401$	3	3527*	2.41.43	5	3821*	$2^2.5.191$	3
3217	$2^4.3.67$	5	3529	$2^3.3^2.7^2$	17	3823	$2.3.7^2.13$	3
3221*	$2^2.5.7.23$	10	3533	$2^2.883$	2	3833*	$2^3.479$	3
3229	$2^2.3.269$	6	3539*	2.29.61	2	3847*	2.3.641	5
3251*	$2.5^3.13$	6	3541	$2^2.3.5.59$	7	3851*	$2.5^2.7.11$	2
3253	$2^2.3.271$	2	3547	$2.3^2.197$	2	3853	$2^2.3^2.107$	2
3257*	$2^3.11.37$	3	3557	$2^2.7.127$	2	3863*	2.1931	5
3259*	$2.3^2.181$	3	3559	2.3.593	3	3877	$2^2.3.17.19$	2
3271	2.3.5.109	3	3571*	2.3.5.7.17	2	3881	$2^3.5.97$	13
3299*	2.17.97	2	3581*	$2^2.5.179$	2	3889	$2^4.3^5$	11
3301*	$2^2.3.5^2.11$	6	3583	$2.3^2.199$	3	3907	$2.3^2.7.31$	2
3307	2.3.19.29	2	3593*	$2^3.449$	3	3911	2.5.17.23	13
3313*	$2^4.3^2.23$	10	3607*	2.3.601	5	3917	$2^2.11.89$	2
3319	2.3.7.79	6	3613	$2^2.3.7.43$	2	3919	2.3.653	3
3323	2.11.151	2	3617*	$2^5.113$	3	3923	2.37.53	2

p	$p-1$	g	p	$p-1$	g	p	$p-1$	g
3929	$2^3.491$	3	4259*	2.2129	2	4603	$2.3.13.59$	2
3931	$2.3.5.131$	2	4261*	$2^2.3.5.71$	2	4621	$2^2.3.5.7.11$	2
3943*	$2.3^3.73$	3	4271	$2.5.7.61$	7	4637	$2^2.19.61$	2
3947	2.1973	2	4273	$2^4.3.89$	5	4639	$2.3.773$	3
3967*	$2.3.661$	13	4283	2.2141	2	4643	$2.11.211$	5
3989*	$2^2.997$	2	4289	$2^6.67$	3	4649	$2^3.7.83$	3
4001	$2^5.5^3$	3	4297	$2^3.3.179$	5	4651*	$2.3.5^2.31$	3
4003	$2.3.23.29$	2	4327*	$2.3.7.103$	3	4657	$2^4.3.97$	5
4007*	2.2003	5	4337*	$2^4.271$	3	4663	$2.3^2.7.37$	3
4013	$2^2.17.59$	2	4339*	$2.3^2.241$	10	4673*	$2^6.73$	3
4019*	$2.7^2.41$	2	4349*	$2^2.1087$	2	4679	2.2339	11
4021	$2^2.3.5.67$	2	4357	$2^2.3^2.11^2$	2	4691*	$2.5.7.67$	2
4027	$2.3.11.61$	3	4363	$2.3.727$	2	4703*	2.2351	5
4049	$2^4.11.23$	3	4373	$2^2.1093$	2	4721	$2^4.5.59$	6
4051*	$2.3^4.5^2$	10	4391	$2.5.439$	14	4723	$2.3.787$	2
4057*	$2^3.3.13^2$	5	4397	$2^2.7.157$	2	4729	$2^3.3.197$	17
4073*	$2^3.509$	3	4409	$2^3.19.29$	3	4733	$2^2.7.13^2$	5
4079	2.2039	11	4421*	$2^2.5.13.17$	3	4751	$2.5^3.19$	37
4091*	$2.5.409$	2	4423*	$2.3.11.67$	3	4759	$2.3.13.61$	3
4093	$2^2.3.11.31$	2	4441	$2^3.3.5.37$	21	4783*	$2.3.797$	6
4099*	$2.3.683$	2	4447*	$2.3^2.13.19$	3	4787	2.2393	2
4111	$2.3.5.137$	17	4451*	$2.5^2.89$	2	4789	$2^2.3^2.7.19$	2
4127*	2.2063	5	4457*	$2^3.557$	3	4793*	$2^3.599$	3
4129	$2^5.3.43$	13	4463*	$2.23.97$	5	4799	2.2399	7
4133	$2^2.1033$	2	4481	$2^7.5.7$	3	4801	$2^6.3.5^2$	7
4139*	2.2069	2	4483	$2.3^3.83$	2	4813	$2^2.3.401$	2
4153*	$2^3.3.173$	5	4493	$2^2.1123$	2	4817*	$2^4.7.43$	3
4157	$2^2.1039$	2	4507	$2.3.751$	2	4831	$2.3.5.7.23$	3
4159	$2.3^3.7.11$	3	4513	$2^5.3.47$	7	4861	$2^2.3^5.5$	11
4177*	$2^4.3^2.29$	5	4517	$2^2.1129$	2	4871	$2.5.487$	11
4201	$2^3.3.5^2.7$	11	4519	$2.3^2.251$	3	4877	$2^2.23.53$	2
4211*	$2.5.421$	6	4523	$2.7.17.19$	5	4889	$2^3.13.47$	3
4217*	$2^3.17.31$	3	4547	2.2273	2	4903	$2.3.19.43$	3
4219*	$2.3.19.37$	2	4549	$2^2.3.379$	6	4909	$2^2.3.409$	6
4229*	$2^2.7.151$	2	4561	$2^4.3.5.19$	11	4919	2.2459	13
4231	$2.3^2.5.47$	3	4567*	$2.3.761$	3	4931*	$2.5.17.29$	6
4241	$2^4.5.53$	3	4583*	$2.29.79$	5	4933	$2^2.3^2.137$	2
4243	$2.3.7.101$	2	4591	$2.3^3.5.17$	11	4937*	$2^3.617$	3
4253	$2^2.1063$	2	4597	$2^2.3.383$	5	4943*	$2.7.353$	7

p	$p-1$	g	p	$p-1$	g	p	$p-1$	g
4951	$2.3^2.5^2.11$	6	4969	$2^3.3^3.23$	11	4993	$2^7.3.13$	5
4957	$2^2.3.7.59$	2	4973	$2^2.11.113$	2	4999	$2.3.7^2.17$	3
4967*	2.13.191	5	4987	$2.3^2.277$	2			

Kleinste primitive Wurzeln einiger Primzahlen zwischen 5000 und 10000.

p	$p-1$	g	p	$p-1$	g	p	$p-1$	g
5009	$2^4.313$	3	6269*	$2^2.1567$	2	7559	2.3779	13
5087*	2.2543	5	6317	$2^2.1579$	2	7577*	$2^3.947$	3
5099*	2.2549	2	6353*	$2^4.397$	3	7607*	2.3803	5
5189*	$2^2.1297$	2	6389*	$2^2.1597$	2	7643	2.3821	2
5273*	$2^3.659$	3	6473*	$2^3.809$	3	7649	$2^5.239$	3
5297*	$2^4.331$	3	6569	$2^3.821$	3	7703*	2.3851	5
5309*	$2^2.1327$	2	6599	2.3299	13	7727*	2.3863	5
5387	2.2693	2	6653	$2^2.1663$	2	7793*	$2^4.487$	3
5393*	$2^4.337$	3	6659*	2.3329	2	7817*	$2^3.977$	3
5399	2.2699	7	6719	2.3359	11	7823*	2.3911	5
5417*	$2^3.677$	3	6737*	$2^4.421$	3	7937*	$2^8.31$	3
5477	$2^2.37^2$	2	6779*	2.3389	2	7949*	$2^2.1987$	2
5483	2.2741	2	6827	2.3413	2	8039	2.4019	11
5507	2.2753	2	6857*	$2^3.857$	3	8069*	$2^2.2017$	2
5639	2.2819	7	6899*	2.3449	2	8117	$2^2.2029$	2
5693	$2^2.1423$	2	6977*	$2^6.109$	3	8147	2.4073	2
5717	$2^2.1429$	2	6983*	2.3491	5	8369	$2^4.523$	3
5807*	2.2903	5	7013	$2^2.1753$	2	8423*	2.4211	5
5813	$2^2.1453$	2	7079	2.3539	7	8543*	2.4271	5
5879	2.2939	11	7109*	$2^2.1777$	2	8573	$2^2.2143$	2
5927*	2.2963	5	7187	2.3593	2	8609	$2^5.269$	3
5939*	2.2969	2	7247*	2.3623	5	8699*	2.4349	2
6047*	2.3023	5	7433*	$2^3.929$	3	8747	2.4373	2
6089	$2^3.761$	3	7457*	$2^5.233$	3	8753*	$2^4.547$	3
6113*	$2^5.191$	3	7517	$2^2.1879$	2	8783*	2.4391	5
6173	$2^2.1543$	2	7523	2.3761	2	8819*	2.4409	2
6197	$2^2.1549$	2	7529	$2^3.941$	3	8837	$2^2.47^2$	2

p	$p-1$	g	p	$p-1$	g	p	$p-1$	g
8963	2.4481	2	9473*	$2^8.37$	3	9743*	2.4871	5
9137*	$2^4.571$	3	9497*	$2^3.1187$	3	9749*	$2^2.2437$	2
9173	$2^2.2293$	2	9533	$2^2.2383$	2	9833*	$2^3.1229$	3
9209	$2^3.1151$	3	9539*	2.19.251	2	9839	2.4919	7
9377*	$2^5.293$	3	9587	2.4793	2	9887*	2.4943	5
9467	2.4733	2	9623*	2.17.283	5			

BERICHTIGUNGEN.

Im ersten Theil dieser Tabelle (Band 17) sind folgende Fehler zu berichtigen:

1) Die kleinste primitive Wurzel von 1013 ist 3, die von 2593 ist 7, die von 2999 ist 17.

2) Das Zeichen * ist zu streichen bei 1213, 1993, 2437, 2729, hinzuzufügen bei 2731, 2887.

SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES[1]

PAR

JULIUS WEINGARTEN.

»Sæpe stilum vertas!»
(HORACE.)

Préface.

Le problème de la déformation des surfaces s'énonce comme il suit:

E, F, G étant des fonctions données des deux variables indépendantes u, v, trouver toutes les fonctions x, y, z de u et de v qui satisfont identiquement à l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

où les du et dv peuvent être pris arbitrairement. (DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IIIme partie, page 253.)

Nous ajouterons dans la suite la supposition que la quantité $EG - F^2$ ne s'annule pas pour toutes les valeurs des variables u et v. Car, en faisant l'hypothèse contraire, la solution du problème n'offre pas de difficultés particulières.

Le seul pas qu'on ait fait vers la solution de ce problème général est qu'on a établi une équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfont simultanément les trois fonctions x, y, z cherchées.

Cette équation est de la forme des équations étudiées par AMPÈRE. Mais il n'existe pas d'éléments linéaires (les surfaces développables exceptées) pour lesquels cette équation admette des intégrales intermédiaires du premier ordre, ou devienne intégrable par la méthode d'AMPÈRE.

---

[1] Ce Mémoire est sans aucune altération celui qui a remporté le grand prix des sciences mathématiques au concours proposé par l'Académie des Sciences de Paris (année 1894).

De plus, cette équation ne se prête pas immédiatement à la solution de la partie la plus intéressante du problème, à la solution de la question: trouver toutes les surfaces réelles applicables sur une surface réelle donnée.

En effet, possédant même toutes les solutions réelles de cette équation, il faudra encore séparer celles qui conviennent de celles qui ne conviennent pas.

Aussi n'a-t-on pas tiré le moindre parti de cette équation pour la découverte de *toutes* les surfaces admettant un élément linéaire donné, quel que soit cet élément linéaire.

C'est pourquoi nous avons essayé de reprendre le problème dans toute sa généralité, en suivant une voie nouvelle. Nous rattacherons la solution du problème de la déformation des surfaces à une autre équation aux dérivées partielles du second ordre, qui est aussi de la forme des équations d'Ampère, mais qui admet moyennant certaines conditions des intégrales intermédiaires du premier ordre. Nous établirons ces conditions et donnerons toutes les équations en question, qui sont intégrables par la méthode de Monge et d'Ampère.

Nous rechercherons d'autres cas, dans lesquels notre équation, que nous nommerons équation fondamentale, devient intégrable par la méthode de Laplace ou se ramène à une équation connue intégrée par Liouville. Nous ferons voir que cette équation fondamentale doit être regardée comme la source des découvertes de toutes les classes générales de surfaces applicables l'une sur l'autre qu'on connait aujourd'hui.

Quant au problème des surfaces réelles applicables sur une surface réelle donnée, toutes les solutions réelles de l'équation fondamentale suffisent pour déterminer toutes les surfaces réelles applicables sur la surface réelle donnée.

Nos efforts pour tirer de notre équation fondamentale une classe contenant *toutes* les surfaces qui admettent un élément linéaire essentiellement nouveau, ont échoué jusqu'à ce moment.

I.

En accordant une certaine préférence à la question:

> Trouver toutes les surfaces réelles applicables sur une surface réelle donnée,

nous supposerons, du moins provisoirement, que les variables indépendantes z et ω, qui entrent dans l'élément donné de la surface considérée, sont des quantités réelles, et que les fonctions réelles E', F', G', dans la forme différentielle quadratique

$$(a) \qquad ds^2 = E'dz^2 + 2F'dzd\omega + G'd\omega^2$$

qui détermine cet élément, restent continues et finies dans le domaine donné de ces variables, ainsi que la courbure totale, que nous désignerons par K en un point déterminé de la surface. Nous excluons le cas dans lequel K s'annule partout. La quantité $E'G' - F'^2$ sera désignée par la lettre Δ'.

Nous verrons bientôt que la restriction d'être réelles, à laquelle nous avons soumis les variables z et ω, ne jouera de rôle ni pour nos calculs, ni pour nos conclusions générales. Mais nous la maintiendrons pour le moment, parce qu'elle raccourcit l'explication et nous permet de mettre de côté des discussions d'un intérêt secondaire.

Au lieu de l'une des variables z et ω, par exemple au lieu de ω, nous ferons entrer une nouvelle variable t définie par l'équation

$$t = \int_{\omega_0}^{\omega} K\sqrt{\Delta'}\, d\omega,$$

l'intégration se rapportant seulement à la variable ω, et ω_0 étant une fonction arbitraire de la quantité z ou une constante. Cette substitution jouera un rôle dans nos calculs. Comme on en déduit

$$dt = \frac{\partial t}{\partial z} dz + K\sqrt{\Delta'}\, d\omega,$$

on peut tirer des deux équations précédentes les valeurs de ω et de $d\omega$ en fonction de z et t, et de dz et dt, et les substituer dans l'équation donnée pour ds^2.

Mais la détermination de $d\omega$ sera impossible pour toutes les valeurs de z et de ω qui annulent l'une ou l'autre des quantités K et Δ'. Nous bornerons donc nos recherches à un domaine des variables z et ω, ou à une région de la surface, où ne s'évanouit ni K, ni Δ'. (Quant à la quantité Δ' il ne faut éviter en vérité que les points ou les lignes dans lesquelles les courbes $z =$ const. touchent les courbes $\omega =$ const.) En convenant que $\sqrt{\Delta'}$ désigne la racine de même signe que K au point considéré de la surface, tous les éléments de l'intégrale t seront positifs ou négatifs, en même temps que la différence $\omega - \omega_0$, et cette quantité t ne s'annulera qu'aux points de la surface pour lesquels on a:

$$\omega - \omega_0 = 0.$$

Mais ω_0 étant une fonction arbitraire de z, on peut prendre pour le lieu des points $\omega - \omega_0 = 0$ une courbe arbitraire de notre surface. Cette courbe séparera en général deux régions de cette surface. Pour l'une de ces régions la quantité $\omega - \omega_0$ sera positive et négative pour l'autre.

Nous poserons encore

$$t = \frac{1}{\sqrt{\sigma}},$$

σ étant une variable toujours positive, mais $\sqrt{\sigma}$ sera toujours du signe de la quantité t.

Toutes ces suppositions étant admises, on aura

$$\frac{-d\sigma}{2\sqrt{\sigma^3}} = \frac{\partial t}{\partial z} dz + K\sqrt{\Delta'}\, d\omega$$

et en tirant la valeur de $d\omega$ de cette équation, et la substituant dans la formule (a), on trouvera

$$ds^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2,$$

E, F, G désignant les quantités suivantes:

$$E = E' - \frac{2F'}{K\sqrt{\Delta'}}\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right) + \frac{G'}{K^2\Delta'}\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2,$$

$$F = \quad - \frac{F'}{2\sqrt{\sigma^3}\,K\sqrt{\Delta'}} + \frac{G'}{2\sqrt{\sigma^3}\,K^2\Delta'}\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right),$$

$$G = \quad \frac{G'}{4\sigma^3 K^2\Delta'}.$$

Nous supposons ces quantités exprimées en fonction de z et de $t = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$, à l'aide de l'équation donnée pour la quantité t.

De ces équations on déduit la suivante:

$$K^2(EG - F^2) = \frac{1}{4\sigma^3},$$

ou encore, en posant $EG - F^2 = \Delta$:

(1) $$K\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}.$$

Mais, pour que cette dernière équation soit légitime, il faut déterminer la quantité $\sqrt{\Delta}$ en chaque point (z, t) de la surface proposée de la manière suivante:

Dans la région de la surface pour laquelle $\sqrt{\sigma}$ est une quantité positive, $\sqrt{\Delta}$ dénotera celle des deux racines de Δ qui est du même signe que la courbure totale K au point (z, t).

Dans la région des valeurs négatives de $\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{\Delta}$ est pris avec le signe contraire de K au même point. La quantité $\sqrt{\Delta}$ changera donc de signe en traversant la ligne $t = 0$. Donc,

étant donné un élément linéaire quelconque par l'équation

$$ds^2 = E'dz^2 + 2F'dzd\omega + G'd\omega^2,$$

on peut toujours, à l'aide d'une quadrature, réduire cet élément à une autre forme

$$ds^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2,$$

pour laquelle les fonctions E, F, G des variables z et σ satisfont à l'équation

$$(1) \qquad K\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}.$$

Cette réduction se fait d'une infinité de manières. Nous nommerons une telle forme: une forme *réduite,* et nous supposerons, dans la suite, que l'élément linéaire de la surface donnée soit ramené à une forme réduite.

Nous nous servirons, dans ce mémoire, des symboles $\left\{ {ik \atop h} \right\}$ de M. Christoffel, pour dénoter les six quantités, importantes dans la théorie des surfaces, qui se composent des trois coefficients E, F, G d'un élément linéaire et de leurs six dérivées premières par rapport aux variables indépendantes qui déterminent la situation d'un point dans la surface donnée. Nous ne reproduirons pas ici les formules explicites pour ces quantités, que l'on rencontre déjà dans le célèbre mémoire de Gauss, et nous supposons connu le mémoire de M. Christoffel: *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke,* Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1868.

On y trouve la signification de ces symboles, d'ailleurs bien connue, et une formule générale pour la courbure totale K en un point quelconque d'une surface dont l'élément linéaire est donné par l'équation

$$ds^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2.$$

Cette formule s'écrit avec nos notations dans la forme:

$$K\sqrt{\Delta} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\left\{ {22 \atop 1} \right\}\frac{\sqrt{\Delta}}{G}\right] - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left\{ {12 \atop 1} \right\}\frac{\sqrt{\Delta}}{G}\right]$$

et se réduit à la formule connue de Gauss, en développant le calcul, l'irrationnalité n'étant qu'apparente.

En substituant la valeur de $K\sqrt{\Delta}$ donnée par l'équation (1), l'équation précédente donnera:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\left\{ {22 \atop 1} \right\}\frac{\sqrt{\Delta}}{G}\right] - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left\{ {12 \atop 1} \right\}\frac{\sqrt{\Delta}}{G} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right].$$

Il existe donc une fonction φ des variables z et σ, ou si l'on veut, des variables z et $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$, définie par l'équation:

$$(2) \qquad \varphi = \int_{z_0, \sigma_0}^{z, \sigma} \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{G} d\sigma + \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{G} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right] dz \right),$$

l'intégrale étant prise le long d'une ligne joignant le point (z_0, σ_0) de la surface au point (z, σ). Si cette ligne traverse la courbe pour laquelle $\frac{1}{\sqrt{\sigma}} = t$ s'annule, le signe de la quantité $\sqrt{\Delta}$ change, en conséquence de la définition donnée de cette quantité, et elle-même s'annule aussi. Comme les quantités $\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}$ tendent vers l'infini si Δ s'annule, on pourrait craindre que l'élément de cette intégrale cessât d'avoir un sens. Mais on se convaincra, par une discussion des formules explicites relatives à ces quantités, que les dérivées premières de la fonction φ restent finies au point d'intersection, et que l'intégration reste légitime quand on traverse la ligne $t = 0$.

On aurait pu éviter cette discussion facile, en introduisant seulement la variable t dans le calcul, et en observant qu'en vérité les quantités E, F, G ne sont pas connues sans ambiguité quand on se donne les valeurs correspondantes de z et de σ, mais qu'elles admettent des valeurs bien définies en *chaque point* de la surface, parceque pour un tel point les quantités z et $\sqrt{\sigma}$ sont des quantités données.

Mais nous conserverons la variable σ dans nos calculs, parce qu'elle joue un rôle capital dans nos recherches.

La fonction φ de l'équation (2) satisfait aux équations:

$$(2') \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{G} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{G} \end{aligned}$$

et admet en chaque point de la surface considérée des dérivées premières finies et continues. Comme elle contient les valeurs arbitraires

z_0 et σ_0, on pourra mettre à la place de φ toute autre fonction ne différant de φ que par une constante d'addition arbitraire.

Nous ferons encore usage dans la suite de quatre fonctions nouvelles a, b, α et β, qui sont définies au moyen de la fonction φ par les équations suivantes:

$$(3)\qquad \begin{aligned} a &= \sqrt{E}\sin(\omega+\varphi), & \alpha &= \sqrt{G}\sin\varphi, \\ b &= \sqrt{E}\cos(\omega+\varphi), & \beta &= \sqrt{G}\cos\varphi, \end{aligned}$$

dans lesquelles l'angle ω est choisi de façon à satisfaire aux relations:

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}, \qquad \sin\omega = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}\sqrt{G}},$$

la quantité $\sqrt{\Delta}$ ayant le même signe que dans la formule donnée pour la fonction φ.

On tire de ces équations:

$$(4)\qquad a\beta - b\alpha = \sqrt{\Delta},$$

et l'équation (1) se change en la suivante:

$$(1')\qquad K(a\beta - b\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}.$$

La connaissance des huit dérivées premières de ces quatre fonctions a, b, α, β, nous sera nécessaire. Elles se composent des dérivées de la fonction φ, et des dérivées des quantités E, F, G. Tirant les dérivées de φ de la formule (2'), et exprimant les dérivées des quantités E, F, G au moyen des symboles $\begin{Bmatrix} ik \\ h \end{Bmatrix}$ de Christoffel, on trouvera les équations, importantes dans la suite,

$$(5)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial z} &= -\frac{b}{\sqrt{\sigma}} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} a + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \alpha, & \frac{\partial a}{\partial \sigma} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} a + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \alpha, \\
\frac{\partial b}{\partial z} &= \frac{a}{\sqrt{\sigma}} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} b + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \beta, & \frac{\partial b}{\partial \sigma} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} b + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \beta, \\
\frac{\partial \alpha}{\partial z} &= -\frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} a + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \alpha, & \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} a + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \alpha, \\
\frac{\partial \beta}{\partial z} &= \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} b + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \beta, & \frac{\partial \beta}{\partial \sigma} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} b + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \beta,
\end{aligned}$$

auxquelles nous ajouterons les formules bien connues

$$(5') \qquad \frac{\partial \log \sqrt{\Delta}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 11 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial \log \sqrt{\Delta}}{\partial \sigma} = \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 22 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Des équations (5), on tire les deux équations, capitales dans notre théorie

$$(6) \qquad \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} + \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} = 0.$$

Comme on a, en conséquence des équations (3), les trois autres:

$$(7) \qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 &= E, \\ a\alpha + b\beta &= F, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= G, \end{aligned}$$

en joignant ces équations aux équations (6):

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} + \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} = 0, \\ &\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} = 0. \end{aligned}$$

on aura cinq équations auxquelles les quatre quantités a, b, α et β sont soumises. Cette circonstance n'est due qu'à l'existence de l'équation (1), laquelle n'est autre chose que le résultat de l'élimination des quatre quantités a, b, α, β entre les cinq équations.

Remarquons encore que, quatre fonctions a, b, α, β vérifiant ces cinq équations étant connues, ces fonctions vérifieront nécessairement les équations (5), ainsi que l'équation (1').

En effet, dérivant les équations (7) par rapport à z et à σ, on aura, en ajoutant les équations (6), huit équations pour déterminer les huit dérivées de ces quatre fonctions. En résolvant ces équations, on arrivera facilement aux équations (5). Mais pour que ces équations soient compatibles, il faut que les quatre conditions d'intégrabilité qu'elles exigent, se trouvent vérifiées. En les formant on trouve qu'elles se réduisent à une seule:

$$(1') \qquad K(a\beta - b\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}.$$

d'où résulte notre proposition.

Si l'on embrasse à la fois les quantités *réelles* et *imaginaires*, les formules établies gardent leur généralité.

L'équation (1)

$$K\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma}}$$

subsistera encore, en fixant convenablement les signes correspondants des deux racines $\sqrt{\Delta}$ et $\sqrt{\sigma}$, ainsi que les formules que nous venons de développer, à l'exception d'un cas particulier. Ce cas, qui ne se présente jamais quand on n'emploie que des variables indépendantes *réelles*, se présentera si l'un ou l'autre des deux coefficients E, G, de l'élément réduit, s'évanouit pour toutes les valeurs des variables z et σ, supposées imaginaires, ou si ces deux coefficients s'annulent ensemble.

Alors une détermination de quatre quantités a, b, α, β vérifiant les équations (6) et (7), à l'aide des équations (3), sera illusoire.

Nous terminerons ce chapitre préliminaire, en donnant, pour ce cas, les valeurs de ces quatre quantités.

Si l'on suppose que $E = 0$ identiquement, on aura $\sqrt{\Delta} = iF$, et en choisissant convenablement la valeur correspondante de la racine $\sqrt{\sigma}$, on aura, au lieu de l'équation (1), la suivante:

$$KiF = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}.$$

Mais, si on a $E = 0$, la formule de Gauss nous donne presque immédiatement

$$-KF = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}}{F}\right),$$

et en substituant on trouve l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}}{F}\right) = \frac{\partial \frac{-i}{\sqrt{\sigma}}}{\partial \sigma}.$$

Donc, il existera une fonction φ définie par les deux équations

$$\frac{\partial \varphi i}{\partial \sigma} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}}{F}, \qquad \frac{\partial \varphi i}{\partial z} = -\frac{i}{\sqrt{\sigma}},$$

d'où on déduit φ par une quadrature.

En prenant les valeurs suivantes:

$$a = Fe^{-\varphi i}, \qquad \alpha = \frac{1}{2}(e^{\varphi i} + Ge^{-\varphi i}),$$

$$b = -iFe^{-\varphi i}, \qquad \beta = \frac{i}{2}(e^{\varphi i} - Ge^{-\varphi i}),$$

on vérifiera immédiatement les équations (6) et (7), ainsi que les équations (5).

Si l'on suppose $G = 0$, on aura de même

$$-KF = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\sigma}}{F}\right)$$

et joignant cette équation à l'autre (1)

$$KiF = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}},$$

on obtient la suivante

$$\frac{\partial\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\sigma}}{F}\right)}{\partial\sigma} = \frac{\partial\frac{-i}{\sqrt{\sigma}}}{\partial\sigma}.$$

On déterminera donc une fonction ψ à l'aide des deux équations

$$\frac{\partial\psi i}{\partial z} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\sigma}}{F} + \frac{i}{\sqrt{\sigma}},$$

$$\frac{\partial\psi i}{\partial\sigma} = 0.$$

En prenant les valeurs suivantes:

$$a = \frac{1}{2}(e^{\psi i} + Ee^{-\psi i}), \qquad \alpha = Fe^{-\psi i},$$

$$b = -\frac{i}{2}(e^{\psi i} - Ee^{-\psi i}), \qquad \beta = iFe^{-\psi i},$$

on vérifiera facilement les équations (6) et (7) ainsi que les équations (5).

F ne s'annulera jamais, en supposant $E=0$ ou $G=0$, parce que nous avons exclu formellement l'hypothèse $EG-F^2\equiv 0$.

Si E et G s'évanouissent à la fois, on aura l'une ou l'autre des deux déterminations des quantités a, b, α, β.

Ainsi, quand on emploie la substitution

$$t=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}=\int_{\omega_0}^{\omega} K\sqrt{\Delta'}\,d\omega$$

pour une forme quelconque du carré de l'élément linéaire donné

$$ds^2=E'dz^2+2F'dz\,d\omega+G'd\omega^2,$$

il prend la forme

$$ds^2=Edz^2+2Fdz\,d\sigma+Gd\sigma^2,$$

qui donne toujours naissance à quatre fonctions a, b, α, β bien déterminées des variables z et σ[1] (ou de z et de $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$), vérifiant les équations:

$$a^2+b^2=E,\qquad a\alpha+b\beta=F,\qquad \alpha^2+\beta^2=G,$$

$$\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial \sigma}+\frac{\beta}{\sqrt{\sigma}}=0,\qquad \frac{\partial \beta}{\partial z}-\frac{\partial b}{\partial \sigma}-\frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}}=0,$$

et en conséquence les équations (5).

Donc, la restriction adoptée, à savoir que les quantités z et σ soient réelles, ne touche nulle part ni les calculs qui précèdent ni les conclusions à en tirer.

II.

Nous supposons maintenant que le carré de l'élément linéaire d'une surface, dont les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque sont désignées par ξ, η, ζ, soit donné par la forme *réduite*

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=Edz^2+2Fdz\,d\sigma+Gd\sigma^2,$$

[1] contenant une constante arbitraire.

et que, de plus, les cosinus directeurs de la normale en ce point soient désignés par X'', Y'', Z''. Posons encore:

$$dX''d\xi + dY''d\eta + dZ''d\zeta = c_{11}dz^2 + 2c_{12}dzd\sigma + c_{22}d\sigma^2,$$

les coefficients c_{ik} étant des fonctions connues des variables indépendantes z et $\sqrt{\sigma}$, qui déterminent la situation d'un point de la surface.

Considérons le système suivant de neuf quantités X, Y, Z, X', Y', Z' et X'', Y'', Z'':

(8)
$$X = \frac{\beta\frac{\partial\xi}{\partial z} - b\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad X' = \frac{a\frac{\partial\xi}{\partial\sigma} - \alpha\frac{\partial\xi}{\partial z}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$Y = \frac{\beta\frac{\partial\eta}{\partial z} - b\frac{\partial\eta}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad Y' = \frac{a\frac{\partial\eta}{\partial\sigma} - \alpha\frac{\partial\eta}{\partial z}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$Z = \frac{\beta\frac{\partial\zeta}{\partial z} - b\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad Z' = \frac{a\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma} - \alpha\frac{\partial\zeta}{\partial z}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$X'' = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$Y'' = \frac{\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$Z'' = \frac{\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial\sigma} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}},$$

$\sqrt{\Delta}$ étant la quantité $a\beta - b\alpha$.

Ces neuf quantités sont évidemment les coefficients d'une substitution orthogonale, ou si l'on aime mieux, les neuf cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre rectangulaire, ayant son origine en un point P de notre surface.

La considération de ce système n'est pas nouvelle. On le trouve, dans sa forme la plus générale, dans l'ouvrage classique de M. Darboux (2[e] partie, page 377). Mais nous donnerons une série de conséquences nouvelles de cette considération.

L'ensemble des arêtes des trièdres donnés par les neuf cosinus directeurs (8), se divise en trois congruences distinctes de droites, ayant leurs points de départ aux points P de la surface considérée. Les deux premières de ces congruences de droites, possédant respectivement les cosinus directeurs (X, Y, Z) et (X', Y', Z') sont formées l'une par toutes les tangentes à un système de lignes situées sur cette surface, l'autre par toutes les tangentes au système de trajectoires orthogonales aux lignes du premier système. La troisième congruence est celle des normales à la surface.

On peut donc concevoir *trois* représentations sphériques de notre surface, en regardant les quantités X, Y, Z ou les autres X', Y', Z' ou enfin X'', Y'', Z'' comme les coordonnées de l'image du point correspondant de la surface sur une sphère dont le rayon est l'unité.

Ce sera notre but le plus prochain de montrer combien les deux représentations déterminées respectivement par les coordonnées (X, Y, Z) et (X', Y', Z'), sont liées intimement à la déformation de cette surface.

Cette liaison s'exprime par les théorèmes suivants:

Supposant données les coordonnées X, Y, Z de l'image du point P de la surface en fonction des deux variables indépendantes nouvelles u et v, les anciennes variables z et σ seront les fonctions de u et de v, qu'il s'agit de déterminer. Soit le carré de l'élément linéaire de cette représentation

$$\mathfrak{E} = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2,$$

les e_{ik} étant des fonctions connues de u et de v, je dis que la fonction σ ne sera autre chose que le premier paramètre différentiel de la fonction z par rapport à la forme différentielle quadratique $\mathfrak{E}$, c'est à dire

$$\sigma = \Delta(z) = \frac{e_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 - 2e_{12}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + e_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}{e_{11}e_{22} - e_{12}^2}.$$

Quant à la fonction z elle-même, elle se déterminera par une équation aux dérivées partielles du second ordre, qui exprime l'évanouissement d'un invariant différentiel par rapport à la forme $\mathfrak{E}$, et se compose de simples paramètres différentiels.

Cette équation étant intégrée, l'ensemble des surfaces applicables sur la surface donnée se déterminera par des quadratures.

Pour démontrer ces propositions, il ne nous reste qu'à calculer la forme $\mathfrak{E}$ au moyen des variables indépendantes z et σ, et à former les invariants en question. Les valeurs trouvées demeureront les mêmes pour les mêmes fonctions et le même point de la sphère $X^2+Y^2+Z^2=1$, quel que soit le système des variables indépendantes dont on fait usage.

Nous calculons les dérivées des coordonnées X, Y, Z à l'aide des équations (5) du chapitre précédent et en faisant usage des équations

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}-c_{11}X'',$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z\partial\sigma}=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}-c_{12}X'',$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial\sigma^2}=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}-c_{22}X'',$$

et de leurs analogues qui se trouvent presque sous la même forme dans le mémoire de GAUSS.

Ayant effectué le calcul, on arrivera aux équations qui suivent:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial z}=X'R-X''Q, &&\frac{\partial X}{\partial\sigma}=X'R_1-X''Q_1,\\
(9)\qquad&\frac{\partial X'}{\partial z}=X''P-XR, &&\frac{\partial X'}{\partial\sigma}=X''P_1-XR_1,\\
&\frac{\partial X''}{\partial z}=XQ-X'P, &&\frac{\partial X''}{\partial\sigma}=XQ_1-X'P_1
\end{aligned}$$

les quantités P, Q, R et P_1, Q_1, R_1 étant données par les formules suivantes:

$$P=\frac{\alpha c_{11}-ac_{12}}{\sqrt{\Delta}},\qquad P_1=\frac{\alpha c_{12}-ac_{22}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$Q=\frac{\beta c_{11}-bc_{12}}{\sqrt{\Delta}},\qquad Q_1=\frac{\beta c_{12}-bc_{22}}{\sqrt{\Delta}}.$$

$$R=-\frac{1}{\sqrt{\sigma}},\qquad R_1=0.$$

Les conditions d'intégrabilité des équations (9), conditions bien connues, prendront la forme:

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial \sigma} - \frac{\partial P_1}{\partial z} &= \frac{Q_1}{\sqrt{\sigma}}, \\
\frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} &= -\frac{P_1}{\sqrt{\sigma}}, \\
\frac{1}{2\sqrt{\sigma}} &= PQ_1 - QP_1.
\end{aligned}
$$ [1]

Des équations (9), nous tirons la forme cherchée $\mathfrak{E}$ du carré de l'élément linéaire de la représentation sphérique:

$$\mathfrak{E} = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left(\frac{1}{\sigma} + Q^2\right)dz^2 + 2QQ_1 dz d\sigma + Q_1^2 d\sigma^2,$$

et si nous formons le paramètre différentiel $\Delta(z)$ par rapport à cette forme, nous aurons à l'instant

$$(11) \qquad \Delta(z) = \sigma,$$

équation par laquelle la première de nos propositions se trouve démontrée.

Formons encore le paramètre mixte des deux fonctions z et X, ce paramètre est donné évidemment par la formule

$$\Delta(z, X) = \frac{\sigma}{Q_1^2}\left(Q_1^2 \frac{\partial X}{\partial z} - QQ_1 \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right).$$

A l'aide des équations (9), on trouve

$$\Delta(z, X) = -X' \sqrt{\sigma}.$$

Ainsi on aura:

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
X' &= -\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\sigma}}, \\
Y' &= -\frac{\Delta(z, Y)}{\sqrt{\sigma}}, \\
Z' &= -\frac{\Delta(z, Z)}{\sqrt{\sigma}},
\end{aligned}
$$

les deux dernières équations se démontrant comme la première

[1] $E dz^2 + 2F dz d\sigma + G d\sigma^2$ étant une forme réduite.

$$(P^2 + Q^2)dz^2 + 2(PP_1 + QQ_1)dz d\sigma + (P_1^2 + Q_1^2)d\sigma^2,$$

c'est à dire $dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2$ le sera aussi.

Des équations (8), on tire aussitôt les suivantes

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = aX + bX',$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \alpha X + \beta X'$$

et quatre autres analogues, se rapportant aux quantités η et ζ. Substituant les valeurs des quantités X', Y', Z' que nous venons de trouver, on est conduit aux trois équations

$$(13) \qquad \begin{aligned} d\xi &= \left[aX - b\frac{\Delta(z\,,\,X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]dz + \left[\alpha X - \beta\frac{\Delta(z\,,\,X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]d(\Delta(z)), \\ d\eta &= \left[aY - b\frac{\Delta(z\,,\,Y)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]dz + \left[\alpha Y - \beta\frac{\Delta(z\,,\,Y)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]d(\Delta(z)), \\ d\zeta &= \left[aZ - b\frac{\Delta(z\,,\,Z)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]dz + \left[\alpha Z - \beta\frac{\Delta(z\,,\,Z)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]d(\Delta(z)), \end{aligned}$$

en utilisant l'équation $\sigma = \Delta(z)$.

Si l'on se souvient que les quatre quantités a, b, α, β sont des fonctions *connues* des variables z et $\sigma = \Delta(z)$, on remarquera bien que les formules importantes (13) donnent les valeurs des différentielles $d\xi, d\eta, d\zeta$ des coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface donnée sous une forme **invariante**, c'est à dire que les valeurs de ces différentielles restent les mêmes, quelles que soient les variables indépendantes u et v dont on a fait usage.

Ces différentielles étant des fonctions linéaires et homogènes des différentielles du et dv, il semble que les équations (13) exigent l'existence de trois conditions d'intégrabilité. Mais nous verrons tout de suite que ces trois conditions se réduisent à une seule.

L'équation qui exprime cette seule condition, équation aux dérivées partielles à laquelle la fonction z sera assujettie, nous l'appellerons notre équation fondamentale.

Pour établir cette équation nous éviterons la voie directe un peu compliquée et nous procéderons comme il suit.

En posant, pour abréger l'écriture

$$z_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} - \begin{pmatrix}11\\2\end{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$z_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} - \begin{pmatrix}12\\2\end{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$z_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \begin{pmatrix}22\\1\end{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} - \begin{pmatrix}22\\2\end{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial v}$$

les crochets $\begin{pmatrix}ik\\h\end{pmatrix}$ dénotant les symboles de M. Christoffel qui se rapportent à la forme $e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2$, symboles distincts des crochets $\begin{vmatrix}ik\\h\end{vmatrix}$ appartenant à la forme $Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2$, nous calculerons les trois paramètres différentiels du second ordre qui suivent:

$$\Delta_2(z) = \frac{e_{11}z_{22} - 2e_{12}z_{12} + e_{22}z_{11}}{e_{11}e_{22} - e_{12}^2},$$

$$J(z) = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 z_{22} - 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} z_{12} + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 z_{11}}{e_{11}e_{22} - e_{12}^2},$$

$$\theta(z) = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}^2}{e_{11}e_{22} - e_{12}^2},$$

dont le premier et le dernier coïncident avec le paramètre second de M. Beltrami et avec l'invariant $-\sigma(z)$ de M. Darboux.

Faisant usage des variables indépendantes z et σ, la forme

$$e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2$$

sera représentée par l'équation suivante:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left(\frac{1}{\sigma} + Q^2\right)dz^2 + 2QQ_1 dzd\sigma + Q_1^2 d\sigma^2.$$

En se servant des formules explicites des symboles $\begin{pmatrix}ik\\h\end{pmatrix}$ appartenant à cette forme, ainsi que des équations (10), on trouvera facilement

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
\binom{11}{1} &= -QP\sqrt{\sigma},\\
\binom{12}{1} &= -Q_1P\sqrt{\sigma},\\
\binom{22}{1} &= -Q_1P_1\sqrt{\sigma},
\end{aligned}
$$

Comme on a pour les mêmes variables indépendantes

$$z_{11} = -\binom{11}{1}, \qquad z_{12} = -\binom{12}{1}, \qquad z_{22} = -\binom{22}{1}$$

on saisit sans peine la validité des déterminations:

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
\sigma\Delta_2(z) - J(z) &= -\frac{1}{2}\sigma\frac{Q}{Q_1},\\
J(z) &= -\sqrt{\sigma^3}\frac{P_1}{Q_1},\\
\theta(z) &= -\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\frac{P}{Q_1}.
\end{aligned}
$$

Formons maintenant la condition d'intégrabilité de l'équation:

$$d\xi = (aX + bX')dz + (\alpha X + \beta X')d\sigma$$

en faisant usage des équations (9). Cette condition

$$\frac{\partial(aX + bX')}{\partial\sigma} = \frac{\partial(\alpha X + \beta X')}{\partial z}$$

se changera en:

$$0 = X\left(\frac{\partial a}{\partial\sigma} - \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}}\right) + X'\left(\frac{\partial b}{\partial\sigma} - \frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}}\right) + X''(-aQ_1 + bP_1 + \alpha Q - \beta P).$$

Comme les quantités qui multiplient les cosinus X et X' s'évanouissent en conséquence des équations (6), il ne restera que l'équation:

$$0 = X''(-aQ_1 + bP_1 + \alpha Q - bP).$$

Les deux conditions analogues conduisent à deux équations corres-

pondantes, et on voit que les trois conditions d'intégrabilité mentionnées n'exigent que l'équation unique:

$$(16) \qquad -aQ_1 + bP_1 + \alpha Q - \beta P = 0.$$

Cette équation, sans doute, se trouvera satisfaite par les valeurs données déjà des quantités P, Q, P_1, Q_1. Mais il s'agit de faire entrer les variables indépendantes u et v dans cette équation. Divisant par Q_1 (qui ne s'annule pas), et portant les valeurs des quotients $\frac{Q}{Q_1}, \frac{P}{Q_1}, \frac{P_1}{Q_1}$ tirées des équations (15) dans l'équation trouvée, on aura *l'équation fondamentale* sous sa forme invariante:

$$(17) \qquad a\sigma + 2\alpha\sigma\Delta_2(z) - \frac{b + 2\alpha\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\theta(z) = 0.$$

σ désignant $\Delta(z)$ et a, b, α, β les fonctions de z et σ déterminées auparavant, où on a remplacé la variable σ par $\Delta(z)$.

Chaque fonction z des variables u et v satisfaisant à l'équation (17), rendra intégrables les différentielles $d\xi, d\eta, d\zeta$ des équations générales (13).

On peut donc énoncer le théorème suivant:

> Etant données trois fonctions ξ, η, ζ des deux variables indépendantes z et σ qui vérifient l'équation
>
> $$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2,$$
>
> dans laquelle E, F, G représentent les coefficients d'une *forme réduite*, si l'on conçoit les trois fonctions X, Y, Z définies par les formules (8), comme des fonctions *données* de deux nouvelles variables indépendantes u et v, vérifiant l'équation
>
> $$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2,$$
>
> la fonction z considérée comme une fonction des variables u et v sera une intégrale de l'équation (17) aux dérivées partielles du second ordre, (σ étant $\Delta(z)$):
>
> $$a\sigma + 2\alpha\sigma\Delta_2(z) - \frac{b + 2\alpha\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\theta(z) = 0.$$

Mais vice versa on aura encore ce second théorème:

Etant données trois fonctions X, Y, Z des deux variables u et v, vérifiant les équations

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

si l'on connaît une intégrale z de l'équation aux dérivées partielles du second ordre:

$$a\sigma + 2\alpha\sigma\Delta_2(z) - \frac{b + 2\alpha\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\theta(z) = 0,$$
$$\sigma = \Delta(z),$$

les trois différentielles $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$

$$\begin{aligned}
d\xi &= \left(aX - b\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)dz + \left(\alpha X - \beta\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)d\Delta(z),\\
(13) \qquad d\eta &= \left(aY - b\frac{\Delta(z, Y)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)dz + \left(\alpha Y - \beta\frac{\Delta(z, Y)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)d\Delta(z),\\
d\zeta &= \left(aZ - b\frac{\Delta(z, Z)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)dz + \left(\alpha Z - \beta\frac{\Delta(z, Z)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)d\Delta(z)
\end{aligned}$$

seront les différentielles exactes de trois fonctions ξ, η, ζ des variables u et v, (ou des variables z et σ) vérifiant l'équation

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2,$$

dans laquelle E, F, G désignent les coefficients d'une *forme réduite* donnée, a, b, α, β désignant les quatre fonctions aussi données appartenant à cette forme.

En combinant ces deux théorèmes généraux, on en conclura facilement:

Toutes les *intégrales réelles* de *l'équation fondamentale,* formée pour une surface réelle donnée, étant connues, *toutes les surfaces réelles,* applicables sur cette surface, s'en déduisent par des quadratures.

Toutes nos propositions sont donc démontrées.

Il sera souvent préférable de donner à notre second théorème une autre forme, où n'interviennent pas les trois quantités E, F, G. La voici:

Etant données trois fonctions X, Y, Z des deux variables u, v, vérifiant les équations:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2$$

et quatre autres fonctions a, b, α, β des deux variables z et σ, liées par les deux relations:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \sigma} + \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} = 0, \\ &\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} = 0, \end{aligned}$$

l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$a\sigma + 2\alpha\sigma\Delta_2(z) - \frac{b + 2\alpha\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\theta(z) = 0,$$

σ signifiant le paramètre différentiel $\Delta(z)$, rendra différentielles totales exactes les expressions:

$$d\xi = \left(aX - b\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)dz + \left(\alpha X - \beta\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)d\Delta(z)$$

etc., et donnera donc par des quadratures *toutes* les surfaces dont l'élément linéaire ds^2 comporte la forme:

$$ds^2 = (a^2 + b^2)dz^2 + 2(a\alpha + b\beta)dzd\sigma + (\alpha^2 + \beta^2)d\sigma^2.$$

III.

Etudions encore la seconde représentation de la surface donnée obtenue à l'aide des cosinus X', Y', Z' au lieu de X, Y, Z.

En répétant les calculs que nous venons de développer, on conçoit aussitôt, qu'il ne s'agit que d'un changement des lettres a, b, α, β.

Pour avoir les équations appartenant à cette représentation, il faut remplacer les lettres a, b, α, β par les lettres $b, -a, \beta, -\alpha$.

Ce changement n'apporte aucune modification dans les équations (5) et (6) du chapitre I.

Supposons maintenant les quantités X', Y', Z' *données* en fonction des deux nouvelles variables indépendantes u' et v', on aura pour l'élément linéaire de cette seconde représentation l'équation:

$$\mathfrak{E}' = dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = e'_{11}du'^2 + 2e'_{12}du'dv' + e'_{22}dv'^2.$$

L'équation fondamentale à laquelle satisfera la fonction z des variables u', v' prendra la forme

$$(17')\qquad b'\sigma' + 2\beta'\sigma'\Delta'_2(z) + \frac{\alpha' - 2\beta'\sqrt{\sigma'}}{\sqrt{\sigma'}}J'(z) + 2\alpha'\sqrt{\sigma'}\,\theta'(z) = 0,$$

$$\sigma' = \sigma - \Delta'(z),$$

les accents indiquant qu'il s'agit des variables u' et v', et que les invariants se rapportent à la forme $e'_{11}du'^2 + 2e'_{12}du'dv' + e'_{22}dv'^2$.

Au lieu des équations (12) obtenues précédemment

$$(12)\qquad X' = -\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}, \qquad Y' = -\frac{\Delta(z, Y)}{\sqrt{\Delta(z)}}, \qquad Z' = -\frac{\Delta(z, Z)}{\sqrt{\Delta(z)}}$$

qui ne donnent que deux équations *indépendantes*, on trouverait les trois autres

$$(12')\qquad X = \frac{\Delta'(z, X')}{\sqrt{\Delta'(z)}}, \qquad Y = \frac{\Delta'(z, Y')}{\sqrt{\Delta'(z)}}, \qquad Z = \frac{\Delta'(z, Z')}{\sqrt{\Delta'(z)}},$$

aussi équivalentes à deux équations indépendantes.

En concevant toujours les quantités X, Y, Z comme des fonctions *données* des variables u et v, les quantités X', Y', Z' comme *données* par les variables u' et v', les équations (12) et (12′) entraînent *quatre* équations indépendantes liant les huit valeurs $u, v, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ et $u', v', \frac{\partial z}{\partial u'}, \frac{\partial z}{\partial v'}$.

Si la fonction z est considérée comme une fonction *connue* des variables u et v, on peut tirer de ces quatre équations, non seulement les variables u', v' en fonction des u, v, mais aussi les dérivées $\frac{\partial z}{\partial u'}, \frac{\partial z}{\partial v'}$ en fonction des mêmes variables.

On peut donc regarder ces quatre équations comme définissant une transformation de l'équation *fondamentale* (17) dans l'autre (17′), et aussi

l'une de ces deux équations comme la transformée de l'autre à l'aide des équations (12) et (12').

On aurait trouvé directement l'équation (17') en remplaçant la fonction φ du premier chapitre par la fonction $\varphi + \frac{1}{2}\pi$. Choisissant une constante arbitraire au lieu de $\frac{1}{2}\pi$, l'équation fondamentale (17) prendrait une forme un peu plus générale que celle de l'équation (17'). Mais cette nouvelle équation elle-même n'est qu'une transformée de l'équation (17), au moyen d'un système d'équations analogue au système des équations (12) et (12'), qu'on forme sans peine.

Nous n'insisterons pas ici sur ces transformations, utiles dans certaines recherches géométriques, en nous contentant des remarques suivantes:

Les équations (17) et (17'), l'une étant la transformée de l'autre à l'aide des équations (12) et (12'), admettent à la fois des intégrales intermédiaires du premier ordre, ou aucune des deux équations n'en admet. En effet, si l'équation (17) est une conséquence immédiate d'une équation de la forme

$$F\left(u\,,\,v\,,\frac{\partial z}{\partial u}\,,\frac{\partial z}{\partial v}\,,z\right) = \text{const.}$$

l'équation (17') sera la conséquence immédiate de l'équation

$$F'\left(u',\,v',\frac{\partial z}{\partial u}\,,\frac{\partial z}{\partial v}\,,z\right) = \text{const.}$$

tirée de la précédente, en y substituant les valeurs des $u\,,v\,,\frac{\partial z}{\partial u}\,,\frac{\partial z}{\partial v}$ déduites des équations (12) et (12').

Donc les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une intégrale intermédiaire du premier ordre de l'équation (17), coïncident avec les conditions pour l'existence d'une telle intégrale de l'équation (17'), et vice versa.

IV.

Portant les valeurs des invariants $\Delta_2(z)$, $J(z)$ et $\theta(z)$, données auparavant, dans l'équation (17), cette équation prendra la forme des équations aux dérivées partielles du second ordre étudiées par AMPÈRE.

Nous supposons, sans altérer la généralité, que la quantité β ne s'évanouit pas identiquement. Car β s'évanouissant, on peut étudier l'équation correspondante (17') dans laquelle $-\alpha$ prend la place de β. Mais α ne s'annule pas en même temps que β, autrement la quantité $EG - F^2 = (a\beta - b\alpha)^2$ s'annulerait. Donc, le facteur de l'invariant $\theta(z)$ pour l'une des deux équations fondamentales (17) ou (17') ne s'annule pas.

Soit l'équation (17) cette équation.

Multipliant l'équation (17) par

$$-\frac{e_{11}e_{22} - e_{12}^2}{2\beta\sqrt{\sigma}}$$

après avoir substitué les valeurs des invariants $\Delta_2(z)$, $J(z)$ et $\theta(z)$, on voit facilement qu'on peut mettre l'équation trouvée sous la forme

$$\text{(A)}\quad \left[z_{11} - \lambda e_{11} - \rho\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\left[z_{22} - \lambda e_{22} - \rho\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] - \left[z_{12} - \lambda e_{12} - \rho\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]^2 + e\frac{\sqrt{\sigma}(\alpha b - a\beta)}{2\beta^2} = 0;$$

λ, ρ, e désignant les quantités

$$\text{(B)}\quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\sigma}, \\ \rho &= -\frac{b + 2\alpha\sqrt{\sigma}}{2\beta\sigma}, \\ e &= e_{11}e_{22} - e_{12}^2. \end{aligned}$$

L'équation (A) est identique à notre équation fondamentale (17), mais sa forme se prête mieux à des recherches ultérieures. Pour ne pas fatiguer, nous mentionnerons seulement le fait que les équations diffé-

rentielles des *caractéristiques* de cette équation aux dérivées partielles, coïncident avec les équations différentielles des *lignes asymptotiques* de la surface donnée. La belle remarque de M. Darboux subsiste donc pour nos équations. On démontre facilement cette proposition en utilisant l'invariance de l'équation (A) et l'invariance des formes quadratiques qui s'annulent pour les caractéristiques.

L'équation (A) se simplifie beaucoup en employant au lieu des deux variables indépendantes u, v quelconques, les deux variables x et y, bien souvent utilisées, qui donnent au carré de l'élément de la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, la forme:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{4dxdy}{(1+xy)^2}.$$

Pour ces variables on aura:

$$X = \frac{x+y}{1+xy}, \qquad Y = \frac{1}{i}\frac{x-y}{1+xy}, \qquad Z = \frac{1-xy}{1+xy},$$

$$e_{11} = 0, \qquad e_{12} = \frac{2}{(1+xy)^2}, \qquad e_{22} = 0, \qquad e = \frac{-4}{(1+xy)^4}$$

et de plus

$$z_{11} = r + \frac{2y}{1+xy}p,$$

$$z_{12} = s,$$

$$z_{22} = t + \frac{2x}{1+xy}q.$$

en se servant des notations de Monge pour les premières et les secondes dérivées de la fonction z, on aura encore

$$\sigma = \Delta(z) = (1+xy)^2 pq.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (A), elle s'écrit

$$\left(r + \frac{2y}{1+xy}p - \rho p^2\right)\left(t + \frac{2x}{1+xy}q - \rho q^2\right) - \left(s - \frac{2\lambda}{(1+xy)^2} - \rho pq\right)^2$$

$$= \frac{4}{(1+xy)^4}\,\frac{\alpha b - \beta a}{2\beta^2}\,\sigma = 0.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$W^2 = \frac{ba - a\beta}{2\beta^2}\sqrt{\sigma} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\beta^2}\sqrt{\sigma} = -\frac{1}{4K\sigma\beta^2}, \tag{C}$$

cette équation prendra l'autre forme

$$\left(r + \frac{2y}{1 + xy}p - \rho p^2\right)\left(t + \frac{2x}{1 + xy}q - \rho q^2\right)$$
$$-\left(s - 2\frac{\lambda + Wi}{(1 + xy)^2} - \rho pq\right)\left(s - 2\frac{\lambda - Wi}{(1 + xy)^2} - \rho pq\right) = 0.$$

Finalement, adoptant les notations:

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} \tau &= \rho\sigma + 2(\lambda + Wi), \\ \tau_0 &= \rho\sigma + 2(\lambda - Wi) \end{aligned}$$

on obtient notre *équation fondamentale* sous la forme suivante:

$$\text{(A')} \qquad \left(r + \frac{2y}{1 + xy}p - \rho p^2\right)\left(t + \frac{2x}{1 + xy}q - \rho q^2\right)$$
$$-\left(s - \frac{\tau}{\sigma}pq\right)\left(s - \frac{\tau_0}{\sigma}pq\right) = 0,$$

qui sera la base des recherches du chapitre prochain.

Nous nous posons la question:

> quelles sont les conditions, nécessaires et suffisantes, pour que cette équation (A') devienne intégrable par la méthode d'Ampère, c'est à dire qu'elle admette deux intégrales intermédiaires générales du premier ordre?

Cette question étant posée, nous allons en donner la solution complète.

V.

Ne voulant pas entrer dans les détails de la théorie des caractéristiques, donnée par Monge et Ampère, nous mettrons en tête de nos développements la proposition suivante:

Etant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme suivante:

$$(r - A_{11})(t - A_{22}) - (s - A_{12})(s - A_{21}) = 0$$

les lettres A_{ik} désignant des fonctions *données* des cinq variables x, y, z, p, q, et s'il existe une fonction φ de ces variables, satisfaisant à la fois aux deux équations linéaires suivantes:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + A_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + A_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + A_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + A_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q} &= 0 \end{aligned}$$

ou aux deux autres:

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + A_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + A_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + A_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + A_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q} &= 0, \end{aligned}$$

la fonction φ égalée à une constante arbitraire, donnera une intégrale du premier ordre de cette équation aux dérivées partielles du second ordre.

En effet de l'équation $\varphi - C = 0$ on tire en dérivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + r\frac{\partial\varphi}{\partial p} + s\frac{\partial\varphi}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + s\frac{\partial\varphi}{\partial p} + t\frac{\partial\varphi}{\partial q} &= 0. \end{aligned}$$

En retranchant les équations (a) de ces dernières on aura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial p}(r - A_{11}) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(s - A_{12}) &= 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p}(s - A_{21}) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(t - A_{22}) &= 0, \end{aligned}$$

et comme $\frac{\partial\varphi}{\partial p}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial q}$ ne s'annulent pas identiquement ensemble, l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\text{(P)} \qquad (r - A_{11})(t - A_{22}) - (s - A_{12})(s - A_{21}) = 0.$$

sera une conséquence immédiate des équations (a).

On trouverait le même résultat en supposant satisfaites les équations (b) par la fonction φ.

La recherche des conditions sous lesquelles l'équation (P) admet des intégrales intermédiaires premières se réduit donc à la recherche des conditions sous lesquelles les deux équations (a) ou les deux autres (b), admettent des solutions communes.

Comme il ne s'agit ici que de notre équation (A'), qui a la forme en question, nous écrivons les deux systèmes d'équations (a) et (b), se rapportant à cette équation (A'), en les désignant par (a') et (b').

On a

$$
(\mathrm{a}')\quad
\begin{cases}
0 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + p\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \left(\rho p^2 - \dfrac{2yp}{1+xy}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \dfrac{\tau}{\sigma}pq\dfrac{\partial\varphi}{\partial q} = \mathfrak{A}(\varphi),\\[2ex]
0 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \dfrac{\tau_*}{\sigma}pq\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \left(\rho q^2 - \dfrac{2xq}{1+xy}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial q} = \mathfrak{E}(\varphi)
\end{cases}
$$

et

$$
(\mathrm{b}')\quad
\begin{cases}
0 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + p\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \left(\rho p^2 - \dfrac{2yp}{1+xy}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \dfrac{\tau_*}{\sigma}pq\dfrac{\partial\varphi}{\partial q} = \mathfrak{A}'(\varphi),\\[2ex]
0 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \dfrac{\tau}{\sigma}pq\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \left(\rho q^2 - \dfrac{2xq}{1+xy}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial q} = \mathfrak{E}'(\varphi).
\end{cases}
$$

Je dis que l'existence d'une fonction $\varphi(x, y, z, p, q)$ satisfaisant à la fois aux deux équations (a'), amène nécessairement l'existence d'une autre fonction $\varphi_*(x, y, z, p, q)$ satisfaisant aux deux équations (b').

En effet, les équations (a') étant vérifiées identiquement par la fonction φ, il sera indifférent de quelles lettres on désigne les cinq variables qui entrent dans cette équation. En permutant donc les lettres p et q et les lettres x et y, laissant z à sa place, et désignant encore par φ_* la fonction déduite de φ par cette permutation, les équations (a') restent vérifiées. Mais comme nous n'avons pas changé ni la variable z ni la variable $\sigma = (1 + xy)^2pq$ par cette permutation, les fonctions ρ, τ, τ_*, qui ne dépendent que de z et σ, resteront les mêmes, et on sera conduit au système (b') formé par rapport à la fonction φ_*.

Ainsi si l'équation (A') admet une intégrale du premier ordre $\varphi = \varphi(x, y, z, p, q)$, elle admettra aussi l'intégrale $\varphi_* = \varphi(y, x, z, q, p)$. Le cas $\varphi = \varphi_*$ ne peut pas se présenter, sans que $\tau = \tau_*$ ou $W = 0$.

Mais ayant égard à l'équation (C) du chapitre IV on reconnait que l'hypothèse $W = 0$ est exclue de nos recherches.

Il ne nous reste plus qu'à étudier les conditions sous lesquelles le système (a) admet des fonctions φ vérifiant à la fois les deux équations de ce système.

Dans ce but, nous formons, en suivant les méthodes de Bour et Jacobi, l'équation:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{E}(\varphi)) - \mathfrak{E}(\mathfrak{A}(\varphi)) = 0,$$

équation linéaire et homogène par rapport aux dérivées de la fonction φ.

Nous jugeons superflu d'écrire ici le calcul fatigant et prolixe, et nous nous bornerons à donner des indications rapides.

Les quantités P et Q étant définies par les équations suivantes:

$$P = \frac{\partial W^2}{\partial \sigma} + \sqrt{\sigma}\left(\frac{\partial \frac{a}{\beta}}{\partial z} - \frac{b}{\beta}\frac{\partial \frac{a}{\beta}}{\partial \sigma}\right) + \frac{a^2}{\beta^2} + 1.$$

$$Q = -\frac{b}{\beta}\frac{\partial W}{\partial \sigma} + W\left(\frac{\partial \frac{b}{\beta}}{\partial \sigma} - \rho\right) + \frac{\partial W}{\partial z}$$

on arrive à l'équation:

$$\text{(B)} \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{E}(\varphi)) - \mathfrak{E}(\mathfrak{A}(\varphi)) = 2W\frac{\partial \varphi}{\partial z} - (Q + Pi)\frac{\partial \varphi}{\partial p}p - (Q - Pi)\frac{\partial \varphi}{\partial q}q = 0.$$

Utilisant pour les dérivations qui figurent dans les expressions des quantités P et Q, la formule (C) (chapitre IV)

$$W^2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\beta^2}\sqrt{\sigma}$$

et les équations (5) (chapitre I) on trouvera aussi:

$$(18) \quad \begin{aligned} P &= W^2\frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial \sigma}, \\ Q &= \frac{1}{2}W\left|\frac{b}{\beta}\frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial z}\right|. \end{aligned}$$

Etudions en premier lieu le cas dans lequel l'équation

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{C}(\varphi)) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}(\varphi)) = 0$$

se trouve vérifiée identiquement, c'est à dire par une fonction φ quelconque. Les équations $\mathfrak{A}(\varphi) = 0$, $\mathfrak{C}(\varphi) = 0$ seront des équations Jacobiennes.

Comme W ne s'évanouit pas, l'équation (B) ne sera satisfaite pour une fonction quelconque que sous les conditions:

$$(19) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}} = 2l,$$

l désignant une constante arbitraire, mais différente de zéro.

La première de ces équations exige que les fonctions W, ρ, τ, τ_* ne contiennent pas la variable z.

Il faut donc que les quotients $\frac{a}{\beta}$, $\frac{b}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ dont dépendent ces fonctions, ne contiennent pas la variable z.

Mais sous cette supposition les équations (6) (chapitre I) exigent pour les quantités a, b, α, β les formes suivantes:

$$a = a'e^{nz}, \qquad b = b'e^{nz}, \qquad \alpha = \alpha'e^{nz}, \qquad \beta = \beta'e^{nz}$$

les a', b', α', β' désignant des fonctions de la seule variable σ, n étant une constante arbitraire.

La seconde de ces équations exige que n soit égale à zéro.

Les fonctions a, b, α, β étant maintenant des fonctions de la seule variable σ, les équations (6) donnent les relations:

$$\frac{\partial a}{\partial \sigma} = \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}}, \qquad \frac{\partial b}{\partial \sigma} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}}$$

desquelles on tire

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{a\beta - b\alpha}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \sigma},$$

ou, en ayant égard à nos équations (19)

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma} = \frac{1}{l},$$

$$E = \frac{\sigma - m}{l} \quad \text{et:} \quad EG - F^2 = \frac{\sigma}{4l^2}.$$

m désignant une constante arbitraire nouvelle.

Le carré de l'élément linéaire de la surface correspondant à ces valeurs de a, b, α et β sera donc:

$$ds^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2 = E\left(dz + \frac{F}{E}d\sigma\right)^2 + \frac{EG - F^2}{E}d\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma - m}{l}dr^2 + \frac{1}{4l}\frac{\sigma d\sigma^2}{\sigma - m},$$

si on a posé

$$dr = dz + \frac{F}{E}d\sigma = dz + f(\sigma)d\sigma.$$

Introduisant une nouvelle variable t par la substitution

$$\frac{\sigma - m}{l} = t^2,$$

on trouve pour l'élément linéaire ds la forme finale:

$$ds^2 = t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2. \tag{20}$$

Ainsi les équations $\mathfrak{A}(\varphi) = 0$, $\mathfrak{E}(\varphi) = 0$ ne seront des équations Jacobiennes, que pour une surface admettant l'élément linéaire donné par l'équation (20). Dans ce cas, ces équations possèderont deux intégrales communes φ et φ' et les équations $\mathfrak{A}'(\varphi) = 0$ et $\mathfrak{E}'(\varphi) = 0$ admettront les intégrales φ_* et φ'_*, et on formera sans peine l'intégrale générale de l'équation fondamentale (A').

Etudions le second cas, qui se présentera si l'équation

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{E}(\varphi)) - \mathfrak{E}(\mathfrak{A}(\varphi))$$

n'est pas vérifiée par une fonction φ quelconque.

L'équation (B) divisée par $-2W$ prendra la forme:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{Q + Pi}{2W}\frac{\partial\varphi}{\partial p}p + \frac{Q - Pi}{2W}\frac{\partial\varphi}{\partial q}q = 0$$

ou la forme équivalente

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (R + Si)\frac{\partial\varphi}{\partial p}p + (R - Si)\frac{\partial\varphi}{\partial q}q = 0 \tag{21}$$

en posant:

$$R = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{\beta}\frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial z}\right),$$

$$S = \frac{1}{2} W \frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial \sigma}.$$

Remplaçant $\sqrt{\Delta}$ par sa valeur tirée de l'équation (1) du premier chapitre on aura aussi

$$(22)\qquad R = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{\beta}\frac{\partial \log(K\sigma^2)}{\partial \sigma} - \frac{\partial \log K}{\partial z}\right), \qquad S = \frac{1}{2} W \frac{\partial \log K\sigma^2}{\partial \sigma}.$$

Eliminons des équations $\mathfrak{A}(\varphi) = 0$, $\mathfrak{E}(\varphi) = 0$ au moyen de l'équation (21) la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, la fonction φ doit vérifier à la fois les trois équations linéaires suivantes, dans lesquelles on a posé pour abréger $R + Si = U$ et $R - Si = U_*$

$$0 = A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left[p^2(\rho + U) - \frac{2y}{1 + xy}p\right]\frac{\partial \varphi}{\partial p} + pq\left(\frac{\tau}{\sigma} + U_*\right)\frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$0 = B(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + pq\left(\frac{\tau_*}{\sigma} + U\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \left[q^2(\rho + U_*) - \frac{2x}{1 + xy}q\right]\frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$0 = C(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + Up\frac{\partial \varphi}{\partial p} + U_* q\frac{\partial \varphi}{\partial q}.$$

Pour que ces trois équations admettent *deux* intégrales communes, il sera nécessaire et suffisant que les deux conditions

$$C(A(\varphi)) - A(C(\varphi)) = 0 \quad \text{et} \quad C(B(\varphi)) - B(C(\varphi)) = 0$$

soient vérifiées identiquement, c'est à dire pour une fonction φ quelconque. (Imschenetzki, *Etude sur les méthodes d'intégration* etc, § 106 etc.). Ces deux conditions constituent deux équations linéaires et homogènes entre les dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial p}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$, et comme elles doivent être identiques, elles donnent naissance à quatre équations qui expriment l'évanouissement des quatre coefficients de ces équations linéaires.

Il ne vaut pas la peine d'écrire ici ces calculs plus fatigants que difficiles et qui peuvent être abrégés par des artifices faciles.

On arrive d'abord à cette forme des équations cherchées:

$$1)\qquad 4R\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}-4W\frac{\partial S}{\partial\sigma}-2\frac{\lambda R}{\sigma}-2\frac{WS}{\sigma}-2\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0,$$

$$2)\qquad 4R\frac{\partial W}{\partial\sigma}-2\frac{b}{\beta}\frac{\partial S}{\partial\sigma}-2RS-2\frac{WR}{\sigma}+2\frac{S\lambda}{\sigma}-\frac{2}{\sigma}\frac{\partial W}{\partial z}+2\frac{\partial S}{\partial z}=0.$$

$$3)\qquad -2R\frac{\partial\frac{b}{\beta}}{\partial\sigma}+2\frac{b}{\beta}\frac{\partial R}{\partial\sigma}+2R^2+\frac{Rb}{\sigma\beta}-2\frac{WS}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\frac{b}{\beta}}{\partial z}-2\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

$$4)\qquad 4R\frac{\partial W}{\partial\sigma}-4W\frac{\partial R}{\partial\sigma}+2RS-\frac{Sb}{\sigma\beta}-2\frac{WR}{\sigma}-\frac{2}{\sigma}\frac{\partial W}{\partial z}=0.$$

λ, W, R, S étant données par les équations (B), (C) du chapitre IV et les équations (22).

Si l'on ne se rebute pas de la complication apparente de ces équations, au moment où le calcul exige violemment son droit, en substituant les valeurs et utilisant toujours les équations (5) (chapitre I), on mettrra les équations 1), 2), 3), 4) sous l'autre forme:

$$\psi=\log K,$$

$$1\qquad \psi_{22}-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2+4KG=0,$$

$$2)\qquad -\frac{b}{\beta}\left(\psi_{22}-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2+4KG\right)+\psi_{12}-\frac{3}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}+4KF=0,$$

$$3)\qquad \frac{b^2}{\beta^2}\left(\psi_{22}-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2+4KG\right)-2\frac{b}{\beta}\left(\psi_{12}-\frac{3}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}+4KF\right)$$
$$+\psi_{11}-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2+4KE=0,$$

$$4)\qquad -\frac{b}{\beta}\left(\psi_{22}-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2+4KG\right)+\psi_{12}-\frac{3}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}+4KF=0,$$

les $\psi_{ι}$ signifiant les abréviations adoptées au chapitre II page 176.

Ainsi nos quatre conditions se réduisent aux trois suivantes:

$$\psi_{11} - \frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 + 4KE = 0,$$

$$\psi_{12} - \frac{3}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} + 4KF = 0,$$

$$\psi_{22} - \frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2 + 4KG = 0.$$

ou encore, si on introduit la variable $\vartheta = \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{-\frac{3}{4}}$, ε étant une constante, on trouve les équations bien simples, écrites sans abréviations:

$$(\vartheta) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma} - 3\varepsilon\vartheta^{-\frac{1}{3}}E = 0,\\ &\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z\partial\sigma} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma} - 3\varepsilon\vartheta^{-\frac{1}{3}}F = 0,\\ &\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\sigma^2} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma} - 3\varepsilon\vartheta^{-\frac{1}{3}}G = 0,\\ &\qquad\qquad \vartheta = \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{-\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

De ces trois équations la première est, en général, une conséquence des deux autres, ou la dernière une conséquence des deux premières. (Dérivant, par exemple la première par rapport à la variable σ, la seconde par rapport à z, et retranchant, on trouvera la dernière, excepté dans le cas singulier $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0$.)

Ainsi nos conditions cherchées se réduisent en vérité à *deux*.

Les équations (ϑ) sont évidemment invariantes pour une substitution qui change la forme quadratique

$$Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2$$

dans l'autre

$$\mathfrak{E}dp^2 + 2\mathfrak{F}dpdq + \mathfrak{G}dq^2,$$

p et q désignant deux variables nouvelles. Donc les équations (ϑ) ne

perdent pas leur validité, quand on suppose l'élément de la surface donnée connu sous une forme quelconque, au lieu de partir de la forme primitive réduite.

En utilisant cette propriété, on verra sans peine que les équations (ϑ) exigent que l'élément linéaire de la surface donnée soit l'élément *d'une surface de révolution*. En effet, prenant au lieu de l'une des variables p et q la quantité $\vartheta = \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{-\frac{3}{4}}$ ou une fonction convenable de cette quantité, et pour l'autre le paramètre des lignes coupant orthogonalement les lignes $\vartheta =$ const., on trouvera $F = 0$ et pour E et G des fonctions de la seule quantité ϑ.

En effectuant le calcul indiqué, on verra que le carré de l'élément linéaire d'une surface assujettie aux équations (ϑ) sera de la forme:

$$Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2 = t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2,$$

l et m désigant deux constantes arbitraires, (l différente de zéro). On prouvera aussi facilement que cette forme est la seule compatible avec les équations invariantes (ϑ).

Cette forme est la même que celle que nous avons rencontrée auparavant.

Ainsi *l'équation fondamentale* (17) n'admet deux intégrales intermédiaires générales du premier ordre que dans le cas où le carré de l'élément linéaire de la surface proposée peut être transformée dans la forme:

$$ds^2 = t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2,$$

et vice versa:

Toutes les surfaces admettant le carré de l'élément linéaire:

$$ds^2 = t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2$$

conduisent à une *équation fondamentale* (17) intégrable par la méthode d'Ampère.

A l'aide des équations invariantes (ϑ), on reconnait aussitôt si l'élément linéaire d'une surface donnée se transformera dans la forme en question ou non.

Les fonctions a, b, α, β de z et de σ de toute *équation fondamentale intégrable par la méthode d'Ampère* seront donc tirées d'une forme **réduite** quelconque $Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2$, déduite de la forme $t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2$ par un changement quelconque des variables.

Il suffira d'avoir intégré *une seule* de ces *équations fondamentales,* qui forment un groupe infini, pour trouver *toutes* les surfaces admettant pour le carré de l'élement linéaire la forme $t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2$, et on choisira une des plus simples pour cette intégration. L'intégration effectuée, on connaîtra, en conséquence des théorèmes donnés auparavant, les intégrales générales de chaque équation appartenant à ce groupe infini.

Mais nous ne donnerons pas ici un tel exemple, qui n'exige qu'un calcul facile, parce que *toutes* les surfaces qui admettent l'élément linéaire en question sont données déjà sous la forme la plus élégante dans l'ouvrage classique de M. Darboux (III[e] partie, page 369 etc.).

Donc l'intégration de toutes les équations fondamentales de notre théorie *intégrables par la méthode des caractéristiques* est achevée, la géométrie ayant devancé l'analyse.

Néanmoins nos *équations fondamentales* intégrables par la méthode d'Ampère donnent à l'enseignement une série illimitée d'exemples, plus ou moins compliqués, d'équations aux dérivées partielles du second ordre, permettant de mener à bonne fin les différents calculs qu'exige l'intégration par la méthode des caractéristiques. Et ces exemples sont bien rares en ce moment.

VI.

En cherchant d'autres formes de *l'équation fondamentale* de notre théorie, rendant possible l'intégration par des méthodes régulières connues, on est conduit à discuter celles de ces équations qui sont linéaires par rapport aux dérivées secondes de z, et ne contiennent pas les dérivées premières.

Elles se présentent en supposant:

$$a = -2f(z), \qquad b = -2\sqrt{\sigma}, \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 0.$$

Les équations auxquelles sont assujetties ces quatre quantités

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \sigma} + \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} = 0$$

sont vérifiées, et l'équation fondamentale (17) prendra la forme bien simple

$$\Delta_2 z = f(z).$$

L'intégration de cette équation donnera *toutes* les surfaces admettant pour le carré de l'élément linéaire la forme:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = (d\sigma - 2f(z)dz)^2 + 4\sigma dz^2.$$

Faisant usage des variables x et y déjà employées, l'équation fondamentale sera:

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{f(z)}{(1 + xy)^2}.$$

Choisissant pour $f(z)$ la fonction linéaire et homogène $\beta(1 - \beta)z$, β désignant une constante arbitraire, on aura pour notre équation fondamentale la suivante:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\beta(1 - \beta)}{(1 + xy)^2}z$$

qui coïncide évidemment avec une équation dejà bien étudiée.

On peut donc appliquer toutes les belles propositions données par M. Darboux sur cette équation à la théorie de la déformation, et déterminer *toutes* les surfaces admettant un élément linéaire compatible avec cette équation.

On retrouvera les résultats donnés par MM. Baroni, Goursat et par moi.

Si l'on suppose $f(z) = e^z + 2$ l'équation (23) donne pour l'équation fondamentale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^z + 2}{(1 + xy)^2}.$$

et en tenant compte de l'identité

$$\frac{\partial^2 \log\left\{\frac{1}{1 + xy}\right\}^2}{\partial x \partial y} = -2\frac{1}{(1 + xy)^2},$$

on trouvera l'équation équivalente à la première:

$$\frac{\partial^2 \log\left[\frac{e^z}{(1 + xy)^2}\right]}{\partial x \partial y} = \left[\frac{e^z}{(1 + xy)^2}\right],$$

dont l'intégrale générale a été donnée par LIOUVILLE.

Toutes les surfaces, applicables l'une sur l'autre, dont l'élément linéaire correspond à cette équation, ont été signalées par moi.

De même l'équation aux dérivées partielles du second ordre, donnée par moi:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + (\rho + \rho')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p \partial q} + \rho\rho'\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0,$$

(Comptes rendus du 23 mars 1891) équation dont ces résultats découlent, n'est qu'un cas particulier de notre équation fondamentale.

En effet, adoptant les valeurs

$$a = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}, \qquad \alpha = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\sigma},$$

$$b = -2\sqrt{\sigma}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\sigma}, \qquad \beta = -2\sqrt{\sigma}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2},$$

où φ désigne une fonction donnée quelconque des variables z et σ, on trouvera que les deux équations (6) sont vérifiées, ainsi que la relation

$$b + 2\alpha\sqrt{\sigma} = 0.$$

Formant *l'équation fondamentale* (17) correspondant à ces valeurs, on trouve:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\sigma}\cdot\Delta_2 z + 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2}\cdot\theta \; [illegible] = 0.$$

Si on fait la substitution

$$z = p, \qquad \sigma = 2q - z^2,$$

cette équation deviendra:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + (\Delta_2(p) + 2p)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + (\theta(p) + p\Delta_2(p) + p^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0.$$

En concevant p comme la normale abaissée de l'origine des coordonnées x, y, z sur le plan tangent au point (x, y, z) d'une surface quelconque, les rayons de courbure principaux à ce point sont donnés, comme on sait, par les formules:

$$\rho + \rho' = \Delta_2(p) + 2p, \qquad \rho\rho' = \theta(p) + p\Delta_2(p) + p^2,$$ [1]

dans lesquelles les invariants $\Delta_2(p)$ et $\theta(p)$ se rapportent à l'élément linéaire de la représentation sphérique de la surface à l'aide des normales en chaque point.

En substituant, on reconnaîtra l'équivalence de l'équation fondamentale correspondant aux valeurs particulières de a, b, α, β, et de l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + (\rho + \rho')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + \rho\rho'\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0.$$

Ainsi les propositions que j'ai attachées à cette équation dans les Comptes rendus du 13 mars 1893 se trouvent vérifiées par notre analyse.

Nous n'avons pas réussi jusqu'à ce moment à tirer de nos équations fondamentales un cas essentiellement nouveau, permettant de déterminer *toutes* les surfaces applicables l'une sur l'autre, qui admettent un certain élément linéaire donné à l'avance. N'ayant en vue que la théorie générale de la déformation, nous ne développerons pas ici les résultats particuliers qu'on peut tirer de notre théorie, et nous terminerons cette étude par quelques remarques, concernant l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfont les trois coordonnées ξ, η, ζ d'une surface, admettant le carré de l'élément linéaire

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2.$$

[1] Bianchi, Lezioni di Geometria Differentiale, p. 137.

Il est bien facile d'établir cette équation à l'aide de nos développements. En effet les équations du chapitre II

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = aX + bX'' \qquad \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \alpha X + \beta X'$$

donnent, en dérivant p. e. la première par rapport à z,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = a\frac{\partial X}{\partial z} + b\frac{\partial X'}{\partial z} + X\frac{\partial a}{\partial z} + X'\frac{\partial b}{\partial z},$$

et si on utilise les équatioos (5) ainsi que les équations (8) et (9) du même chapitre, on aura la première des équations connues suivantes, les deux autres se trouvant par un calcul semblable:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = c_{11} X'',$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial \sigma} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = c_{12} X'',$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma^2} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = c_{22} X''.$$

Faisant usage encore des équations connues

$$K = \frac{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}{EG - F^2}, \qquad X''^2 = 1 - \Delta(\xi)$$

et employant pour abréger les notations $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}$, on établira l'équation, à laquelle satisfait la coordonnée ξ, sous sa forme connue invariante

$$\frac{\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2}{EG - F^2} = K(1 - \Delta(\xi)).$$

C'est cette équation, qui, K étant supposé différent de zéro, n'admet pas pour aucun élément linéaire, des intégrales intermédiaires du premier ordre, et ne permet pas l'intégration par une méthode régulière connue.

Mais notre analyse a mis en évidence pour la première fois ce fait bien digne de recherches ultérieures, qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre, qui résiste à l'intégration par les méthodes ré-

gulaires connues, peut être réduite à une autre équation aux dérivées partielles du même ordre, qui ne se montre pas si rebelle.

Ayant trouvé l'intégrale générale de cette équation résolvante, on aura l'intégrale de la proposée par une quadrature contenant les fonctions arbitraires sous le signe d'intégration.

MÉMOIRE SUR L'ÉLIMINATION

PAR

J. HADAMARD

À BORDEAUX.

1. La méthode des fonctions symétriques apprend à éliminer les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{n+1} = 0$$

en formant le produit $\Pi f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, étendu aux systèmes de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui vérifient les n premières équations (1).

On obtient ainsi pour le résultant $n + 1$ expressions différentes en considérant successivement comme la dernière chacune des équations données. Il peut être utile de savoir comparer entre elles ces différentes expressions, ou plutôt leurs numérateurs. Cette comparaison peut même se présenter comme nécessaire dans certaines méthodes d'élimination (voir, par exemple, OTTO BIERMANN, *Über die Bildung der Eliminanten eines Systems algebraischer Gleichungen*[1]).

Comme on arrive à des résultats intéressant différents points de la théorie de l'élimination, nous sommes amenés à reprendre l'ensemble de cette théorie, après quoi nous aurons à présenter certaines applications géométriques.

[1] Monatshefte für Mathematik und Physik, 5e année, pag. 17—33; Vienne 1894.

I.

2. Rappelons d'abord ce qui se passe pour le cas d'une seule inconnue. Soient les deux équations $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, ou, en rendant homogène,

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \qquad f_2(x_1, x_2) = 0 \tag{1'}$$

de degrés m_1, m_2 respectivement. Le résultant de ces deux équations, que nous désignerons par R_{12} est le produit

$$\Pi f_2(x_1, x_2)$$

où les x_1, x_2 sont définis par l'égalité (identique par rapport aux u)

$$\Pi(u_1 x_1 + u_2 x_2) = f_1(u_2, -u_1). \tag{2}$$

Cette expression R_{12} est liée à l'expression analogue R_{21} par la relation

$$R_{12} = (-1)^{m_1 m_2} R_{21}.$$

3. Les fonctions $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ étant représentées symboliquement par $a_x^{m_1}$, $b_x^{m_2}$, la quantité invariante R_{12} s'exprimera par une combinaison de déterminants symboliques.

Prenons d'abord f_2 seul sous forme symbolique, f_1 étant donné par l'égalité (2). Il faudra remplacer R_{12} par la quantité

$$\frac{1}{\underline{|m_1}} \sum (b_1^{(1)} x_1^{(1)} + b_2^{(1)} x_2^{(1)})^{m_2} (b_1^{(2)} x_1^{(2)} + b_2^{(2)} x_2^{(2)})^{m_2} \dots (b_1^{(m_1)} x_1^{(m_1)} + b_2^{(m_1)} x_2^{(m_1)})^{m_2}$$

où la sommation est étendue aux $\underline{|m_1}$ permutations des m_1 couples $(b_1^{(1)}, b_2^{(1)})$, $(b_1^{(2)}, b_2^{(2)})$, ... Le problème de l'expression symbolique du résultant est donc identique au suivant: *La forme*

$$f_1(u_2, -u_1) = (u_1 x_1^{(1)} + u_2 x_2^{(1)}) \dots (u_1 x_1^{(m_1)} + u_2 x_2^{(m_1)})$$

étant représentée symboliquement par $(au)^{m_1}$ *(ou encore par* $u_a^{m_1}$, *en posant*

$a_1 = \alpha_2$, $a_2 = -\alpha_1$), *trouver sous forme symbolique la somme des puissances* $m_2^{\text{èmes}}$ *des* $|\underline{m_1}$ *produits tels que*

$$\varpi = (u_1^{(1)}x_1^{(1)} + u_2^{(1)}x_2^{(1)})(u_1^{(2)}x_1^{(2)} + u_2^{(2)}x_2^{(2)}) \ldots (u_1^{(m_1)}x_1^{(m_1)} + u_2^{(m_1)}x_2^{(m_1)}).$$

Les deux expressions $\Sigma\varpi^{m_2}$ et R_{12} sont effectivement équivalentes moyennant le remplacement des u par les b.

4. Le produit ϖ est racine d'une équation de degré $|\underline{m_1}$ dont les coefficients sont des contrevariants de f_1; le dernier terme de cette équation est du reste immédiatement connu. Il est évidemment

$$[f_1(u_2^{(1)}, -u_1^{(1)})f_1(u_2^{(2)}, -u_1^{(2)}) \ldots f_1(u_2^{(m_1)}, -u_1^{(m_1)})]^{|\underline{(m_1-1)}}.$$

Il suffira donc d'avoir formé les $|\underline{m_1} - 1$ premières sommes de puissances pour pouvoir calculer toutes les autres.

Le nombre $|\underline{m_1} - 1$ augmentant rapidement avec m_1, cette remarque n'a pas d'application à partir de $m_1 = 4$. Mais c'est elle que l'on emploie dans le cas de $m_1 = 2$, et elle conduit directement au calcul de R_{12} pour $m_1 = 3$. M. Gordan a en effet[1] formé les résultants de l'équation du 3[e] degré avec les équations de degré inférieur à 6. Or ceci suffit, d'après ce qui vient d'être dit, pour passer au cas de m_2 quelconque.

En désignant par $\frac{S_1}{6}, \frac{S_2}{6}, \ldots, \frac{S_5}{6}$ les expressions de R_{12} pour les cinq premiers degrés, on devra[2] en déduire les quantités

$$A_1 = -S_1, \qquad A_2 = \frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}S_2, \qquad A_3 = -\frac{S_1^3}{6} + \frac{S_1S_2}{2} - \frac{S_3}{3},$$

$$A_4 = \frac{S_1^4}{24} - \frac{S_1^2S_2}{4} + \frac{S_1S_3}{3} + \frac{S_2^2}{8} - \frac{S_4}{4},$$

$$A_5 = -\frac{S_1^5}{120} + \frac{S_1^3S_2}{12} - \frac{S_1S_2^2}{8} - \frac{S_1^2S_3}{6} + \frac{S_2S_3}{6} + \frac{S_1S_4}{4} - \frac{S_5}{5},$$

$$A_6 = (ab)^3(a'b')^3(a''b'')^3(a'''b''')^3(ab)^3(a^{\text{IV}}b')^3(a^{\text{V}}b'')^3,$$

---

[1] Math. Annalen, t. 3, pag. 355 et suiv.

[2] Voir Serret, *Algèbre supérieure*, t. I, pag. 460.

et le résultant de la forme cubique avec une autre de degré quelconque m_2 sera[1]

$$\frac{1}{6}\sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6} m_2 (\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_6!} A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2}\ldots A_6^{\lambda_6},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ désignant successivement les différents systèmes d'exposants entiers et positifs qui vérifient la condition

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 6\lambda_6 = m_2;$$

il faut seulement observer que, dans les multiplications, les a doivent être remplacés chaque fois par des symboles synonymes, mais non les b.

5. La résolution du problème du n° 3 permettrait de résoudre sous sa forme générale le problème de l'expression des fonctions symétriques, tel qu'il se pose dans la théorie des formes. En effet, de l'expression $\Sigma\varpi^{m_2}$ peut se déduire par formation polaire l'expression plus générale

$$P = \sum (u_1^{(1)}x_1^{(1)} + u_2^{(1)}x_2^{(1)})(u_1^{(2)}x_1^{(1)} + u_2^{(2)}x_2^{(1)})\ldots = \sum\prod \gamma_k^i$$

où chaque couple $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m_1)$ figure dans m_2 facteurs, les couples des u correspondants étant ou non différents. La sommation est étendue aux $m_1!$ permutations des x et l'on a posé

$$(3) \qquad \gamma_k^i = u_1^{(i)}x_1^{(k)} + u_2^{(i)}x_2^{(k)}.$$

Or cette expression est la fonction symétrique la plus générale dans les termes de laquelle n'entrent que des facteurs contrevariants. Les facteurs covariants se ramènent d'ailleurs aux précédents par la substitution $u_1 = y_2$, $u_2 = -y_1$ et les facteurs invariants par l'identité

$$(4) \qquad x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_2^{(1)}x_1^{(2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u_1^{(1)}} & \dfrac{\partial}{\partial u_2^{(1)}} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1^{(2)}} & \dfrac{\partial}{\partial u_2^{(2)}} \end{vmatrix} \gamma_1^1 \gamma_2^2.$$

6. Le calcul d'une expression P conduit à une quantité du même degré total $m_1 m_2$ par rapport aux lettres u et aux lettres a, et qui par

[1] Serret, ibid., pag. 449

suite peut s'écrire à l'aide de facteurs du seul type (αu) (ou u_α); car si un terme quelconque renferme des facteurs (uu') il renferme un même nombre de facteurs $(\alpha\alpha')$ que l'on peut accoupler aux premiers pour utiliser l'identité

$$(5) \qquad (\alpha\alpha')(uu') = u_\alpha u'_{\alpha'} - u_{\alpha'} u'_\alpha.$$

Ce résultat peut d'ailleurs être atteint de plusieurs façons différentes, d'où, pour la quantité cherchée, plusieurs formes symboliques équivalentes. Néanmoins certaines de ces formes devront être considérées de préférence aux autres.

Remarquons en effet qu'une expression symbolique où n'entrent que des facteurs u_α peut immédiatement s'exprimer en fonction des x par la relation

$$(6) \qquad u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(2)} \ldots u_\alpha^{(m_1)} = \frac{1}{|m_1} \Sigma \gamma_1^1 \gamma_2^2 \ldots \gamma_{m_1}^{m_1}$$

où dans le second membre les indices inférieurs subissent toutes les permutations possibles.

L'expression symbolique devra être telle que cette opération conduise à une quantité P_1 identique à P. Mais deux cas peuvent se présenter. Ou bien l'égalité $P_1 = P$ est une identité *par rapport aux* γ; ou bien elle ne devient telle qu'en remplaçant ces γ par leurs valeurs (3). Dans le premier cas nous dirons, pour abréger, que la relation $P_1 = P$ est essentiellement identique. Nous allons faire voir dans un instant que pour toute quantité P existe une forme symbolique satisfaisant à cette condition, autrement dit une forme symbolique essentiellement équivalente.

7. L'avantage des formes symboliques essentiellement équivalentes est de se conserver lorsqu'on passe à un nombre de variables supérieur à deux.

Soit

$$(7) \qquad u_\alpha^m = \prod_{k=1}^{m} \gamma_k$$

où γ_k a cette fois la valeur

$$\gamma_k = u_1 x_1^{(k)} + \ldots + u_h x_h^{(k)}$$

une forme, décomposable en facteurs linéaires, à h variables, h étant un nombre que nous pourrons faire varier à volonté. Formons dans ces nouvelles conditions la quantité

$$P = \Sigma \Pi \gamma_k^i.$$

Cette quantité peut s'exprimer sous une forme symbolique qui, étant du même degré par rapport aux u et aux α, peut être ramenée comme précédemment à ne contenir que des facteurs u_α. Comme de cette forme symbolique on revient à la forme primitive en employant précisément la même relation (6) que dans le cas de $h = 2$, une forme symbolique *essentiellement équivalente* trouvée dans ce dernier cas conviendra également à notre problème actuel.

Inversement, si une forme symbolique de l'expression P convient pour h suffisamment grand, elle est essentiellement équivalente.

Ceci revient à dire que l'on peut prendre h assez grand pour que les γ_k^i soient tous indépendants. Or, dans l'hypothèse contraire, comme toute relation existant entre ces quantités pour une certaine valeur de h reste évidemment vraie pour les valeurs moindres, il existerait pour le nombre h une certaine valeur à partir de laquelle le système E des équations qui lient les γ entre eux ne changerait plus jusqu'à $h = \infty$. Ce système devrait être tel que, vérifié pour certaines valeurs $\gamma_k'^i$ des γ et pour d'autres valeurs $\gamma_k''^i$, il soit par cela même vérifié pour les valeurs $\gamma_k'^i + \gamma_k''^i$ (cette addition revenant au doublement du nombre h). De pareilles équations ne peuvent être que linéaires, ce qui est manifestement impossible dans l'espèce.

En particulier, ceci nous permet d'affirmer l'existence d'une expression symbolique essentiellement équivalente pour toute expression P.

8. La formation générale de l'expression P permettrait d'obtenir, pour un nombre quelconque h de variables, les fonctions symétriques invariantes des systèmes $x_1^{(k)}, \ldots, x_h^{(k)}$ qui figurent dans une forme du type (7).

En effet, de telles fonctions peuvent s'exprimer à l'aide de facteurs symboliques du type γ_k^i et de facteurs déterminants: ces derniers se ramènent aux premiers à l'aide d'une formule analogue à la formule (4).

9. Si nous appliquons spécialement au résultant de deux formes binaires $(au)^m = u_\alpha^m$ et $(bu)^n = u_\beta^n$, nous pouvons nous demander s'il existe pour ce résultant une forme symbolique qui, lorsqu'on remplace, soit les lettres b, soit les lettres a par des u, soit dans les deux cas essentiellement équivalente.

Pour résoudre cette question, nous considérerons les deux formes

$$F = u_\alpha^m, \qquad \Phi = b_x^n$$

à un nombre quelconque h de variables (les variables tangentielles u pour l'une, les variables ponctuelles x pour l'autre).

Si la première forme est décomposable en facteurs linéaires

$$F = \prod_{i=1}^{m}(u_1\xi_1^{(i)} + u_2\xi_2^{(i)} + \ldots + u_h\xi_h^{(i)}), \tag{8}$$

le produit des résultats de substitution des systèmes des ξ dans la deuxième forme s'exprime par un invariant commun à F et Φ. Soit A l'expression ainsi obtenue, qui n'est pas complètement déterminée en ce sens qu'on peut lui ajouter une quelconque des expressions G qui s'annulent lorsque F est un produit de facteurs linéaires.

Si de même Φ se décompose en facteurs du premier degré

$$\Phi = \prod_{k=1}^{n}(g_1^{(k)}x_1 + \ldots + g_h^{(k)}x_h), \tag{9}$$

le produit des résultats de substitution des différents systèmes de x dans F sera un invariant commun B, déterminé seulement aux expressions D près qui s'annulent lorsque Φ admet une telle réduction.

Je dis que l'on peut disposer des quantités additionnelles C et D de manière à rendre les invariants A et B identiques.

Pour cela, remarquons que lorsque F et Φ sont tous deux décomposables en facteurs linéaires, on a nécessairement $A = B$, ces deux expressions représentant toutes deux le produit

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(\xi_1^{(i)}g_1^{(k)} + \ldots + \xi_h^{(i)}g_h^{(k)})$$

Il ressort de là presque évidemment que la différence B peut s'exprimer par la somme d'une expression C et d'une expression D: c'est là

un fait général dont un cas particulier est fourni par le théorème de Nöther sur les courbes planes passant par l'intersection de deux courbes données. Ici cette conclusion peut s'établir directement de la façon suivante.

Supposons F réductible et représenté par le produit (8). La différence $A - B$, qui est un polynôme homogène et symétrique par rapport aux ξ, est par suite une somme de termes de la forme PQ, où P est une fonction symétrique élémentaire des ξ et Q une fonction des coefficients de Φ. Cette dernière est nécessairement une expression D, puisque la somme ΣPQ est nulle, quels que soient les ξ, lorsque F et Φ ont respectivement les formes (8), (9). Si donc nous remplaçons les fonctions symétriques P par leurs valeurs en fonction des coefficients de F, nous aurons une expression D, identiquement égale à la différence $A - B$ chaque fois que F est réductible et qui par suite n'en différera, pour F quelconque, que d'une expression C, ce que nous voulions établir.

Dans l'identité

$$A - B = C + D,$$

les polynômes C et D ne sont pas, il est vrai, nécessairement des invariants. Mais ils le deviennent par l'application de la méthode ordinaire (substitution linéaire la plus générale et application répétée de l'opération désignée dans la théorie des formes par la lettre Ω).

Dès lors, si h a été pris suffisamment grand, la quantité

$$A - C \equiv B + D$$

fournit, en y réduisant le nombre des variables à deux, une expression jouissant de la propriété cherchée (les formes binaires données étant a_x^m, b_x^n).

10. Soient maintenant

$$\text{E)} \qquad \begin{cases} (1) & f_1 = 0, \\ (2) & f_2 = 0, \\ (3) & f_3 = 0, \end{cases}$$

trois équations de degrés m_1, m_2, m_3 aux inconnues x, y. Les termes de plus haut degré des polynômes f_1, f_2, f_3 nous donnent trois formes

binaires f_1^0, f_2^0, f_3^0, dont nous formerons les résultants. Nous désignerons par $R_{\alpha\beta}^0$ le résultant de f_α^0, f_β^0, et, tout d'abord, nous supposerons ces résultants différents de o. Désignons par $x^{(i)}, y^{(i)}$ les solutions communes aux équations $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ et considérons le produit

$$P_3 = \prod_i f_3(x^{(i)}, y^{(i)}).$$

Ce produit s'exprime rationnellement à l'aide des coefficients des équations E, mais dans son expression figure un dénominateur lequel n'est autre que $R_{12}^{0^{m_3}}$. En effet, dans l'équation finale résultant de l'élimination de y entre E_1 et E_2, le coefficient de $x^{m_1 m_2}$ est R_{12}^0; il en est de même de l'équation en $x + \lambda y$, à cause des propriétés invariantes de R_{12}^0. L'expression P_3, qui est de degré m_3 par rapport aux x, y ne peut donc renfermer d'autre dénominateur que ce coefficient élevé à la puissance m_3. Nous poserons

$$R_{123} = P_3 \,.\, R_{12}^{0^{m_3}}. \tag{10}$$

En partant des équations $\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3$, nous formerons les expressions analogues P_1 et $R_{231} = P_1 \,.\, R_{23}^{0^{m_1}}$. Nous nous proposons de rechercher la relation entre P_1 et P_3 (ou entre R_{231} et R_{123}).

11. Considérons à cet effet le produit Π_1 analogue à P_1, mais où f_3 est remplacé par $f_3 - \lambda$. Ce produit s'exprime par un polynôme en λ qui, égalé à o, exprime que $\lambda = f_3(x^{(i)}, y^{(i)})$. Le produit des racines de l'équation $\Pi_1 = 0$ (considérée comme équation en λ) est donc P_3; le terme indépendant de λ est P_1. Le rapport $\frac{P_1}{P_3}$ est par suite égal au coefficient de $\lambda^{m_1 m_2}$ dans Π_1, multiplié par $(-1)^{m_1 m_2}$.

Or, si nous effectuons la transformation

$$x = \frac{1}{x'}, \qquad y = \frac{y'}{x'}$$

qui, aux équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 - \lambda = 0$, substitue les équations

$$(\mathrm{E}') \quad \begin{cases} (1) \quad F_1 \equiv x'^{m_1} f_1\left(\frac{1}{x'}, \frac{y'}{x'}\right) = 0, \\ (2) \quad F_2 \equiv x'^{m_2} f_2\left(\frac{1}{x'}, \frac{y'}{x'}\right) = 0, \\ (3) \quad F_3 \equiv x'^{m_3} \left| f_3\left(\frac{1}{x'}, \frac{y'}{x'}\right) - \lambda \right| = 0 \end{cases}$$

le produit Π_1 sera remplacé par le produit

$$\Pi'_1 = \Pi_1 . (\Pi x')^{m_1} = \frac{\Pi_1}{(\Pi x)^{m_1}},$$

la multiplication étant étendue aux solutions communes aux deux dernières équations (E').

Pour $\lambda = \infty$, le produit Π'_1 prend une valeur finie et déterminée, car l'équation E'_3 se réduit à $x'^{m_3} = 0$, de sorte que Π'_1 devient égal à $\left(\frac{R^0_{21}}{b^{m_1}}\right)^{m_3}$, en désignant par b le coefficient de y^{m_2} dans f_2. Nous aurons donc à multiplier cette quantité par la puissance $m_1{}^{\text{ème}}$ du coefficient de λ^{m_2} dans $\Pi(x)$. Ce dernier s'obtient en formant par l'élimination de y entre $f_2 = 0$ et $f_3 - \lambda = 0$ l'équation en x. Pratiquant cette élimination par la méthode des fonctions symétriques en partant de l'équation $f_2 = 0$, nous voyons que le coefficient de $x^{m_2 m_3}$ est $\frac{R^0_{23}}{b^{m_3}}$ et le terme indépendant de x un polynôme de degré m_2 en λ avec $(-1)^{m_2}$ pour premier coefficient, de sorte que le coefficient de λ^{m_2} dans $\Pi(x)$ a la valeur $\frac{b^{m_3}}{R^0_{23}}(-1)^{m_2(1+m_3)}$, ce qui donne

$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{R^{0^{m_3}}_{21}}{R^{0^{m_1}}_{23}}(-1)^{m_1 m_2 m_3} \tag{11}$$

ou

$$R_{231} = (-1)^{m_1 m_2 m_3} R_{213} = R_{123}. \tag{12}$$

Si nous remarquons que la substitution $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$ est alternée, tandis que la substitution $\begin{pmatrix}231\\213\end{pmatrix}$ ne l'est pas, nous voyons que notre résultat donne l'énoncé suivant: *L'expression* (10) *ne change pas par une substitution alternée des indices* 1, 2, 3, *au lieu qu'une substitution non alternée la multiplie par* $(-1)^{m_1 m_2 m_3}$.

C'est à cette expression entière R_{123}, indépendante au signe près, comme on le voit, de l'ordre dans lequel on prend les équations, qu'il convient de donner le nom de *résultant* des polynômes f_1, f_2, f_3.

12. Si nous voulons étudier la même question au point de vue projectif, il faudra considérer les trois équations

$$(E) \qquad \begin{cases} (1) & f_1 = 0, \\ (2) & f_2 = 0, \\ (3) & f_3 = 0 \end{cases}$$

comme homogènes et de degrés respectifs m_1, m_2, m_3 par rapport aux variables x_1, x_2, x_3 qui correspondent à x, y par les relations $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$.

Pour voir ce qui remplacera le résultant $R^0_{\alpha\beta}$, considérons le résultant des deux formes binaires $a_x^{m_\alpha}, b_x^{m_\beta}$, lequel s'exprime par des facteurs déterminants symboliques binaires, et appliquons-lui le principe de translation, c'est à dire changeons chaque facteur déterminant binaire en un déterminant ternaire par l'addition d'une lettre u. Nous obtenons ainsi un contrevariant commun des formes f_α, f_β, que nous nommerons $R^u_{\alpha\beta}$. Ce contrevariant se réduit à $R^0_{\alpha\beta}$ pour $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 1$. Il peut d'ailleurs se définir sans que l'on connaisse la forme symbolique du résultant. Il suffit d'appliquer aux deux formes données une substitution linéaire où la nouvelle variable correspondant à x_3 soit $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$, de former sur les nouvelles formes le résultant $R^0_{\alpha\beta}$ et de diviser par la puissance $m_\alpha m_\beta$ du déterminant de la substitution.

Egalée à 0, la fonction R^u_{12} exprime que la droite $u_x = 0$ passe par un point $(f_1 = 0, f_2 = 0)$. Elle est identiquement nulle si ces deux courbes ont une partie commune. Sinon, $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}$ désignant les coordonnées de leurs points communs, on a

$$R^u_{12} = \mu \prod_i (u_1x_1^{(i)} + u_2x_2^{(i)} + u_3x_3^{(i)}),$$

chaque facteur étant élevé à une puissance convenable, qui n'est autre que le degré de multiplicité du point correspondant; et μ étant un facteur constant. Autrement dit, le rapport

$$(13) \qquad \mu = \frac{R^u_{12}}{\prod_i (u_1x_1^{(i)} + u_2x_2^{(i)} + u_3x_3^{(i)})}$$

est indépendant des u. Mais ce rapport dépend des déterminations adoptées pour les x (lesquels ne sont définis qu'à un facteur de proportionnalité près). Pour $x_3^{(1)} = x_3^{(2)} = \ldots = 1$, on a

$$\mu = R_{12}^u,$$

comme on le voit en faisant $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 1$. Dès lors R_{123} peut être défini: le produit $\prod f_3(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ multiplié par la puissance $m_3^{\text{ème}}$ de la quantité (13), soit

$$(14) \qquad R_{123} = \prod_i f_3(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \left[\frac{R_{12}^u}{\prod_i (u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)})} \right]^{m_3}$$

où le second membre est cette fois indépendant des u d'une part, des facteurs de proportionnalité qui figurent dans les x, de l'autre. En prenant le cas de $\mu = 1$, on voit que *le résultant est donné par le produit* $\prod_i f_3(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$, où les x sont définis par l'égalité (identique par rapport aux u)

$$\prod_i (u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)}) = R_{12}^u.$$

13. Le résultant considéré sous forme symbolique est donc une expression de la forme P considérée au n° 7. En particulier on saurait calculer cette expression symbolique si l'on savait résoudre le problème posé au n° 6: *trouver pour le résultant de deux formes binaires une expression essentiellement équivalente.* Ceci permettrait en effet d'abord de calculer la forme R_{12}^u, puis de passer au résultant R_{123} par la considération du résultant de deux formes, l'une de degré $m_1 m_2$, l'autre le degré m_3.

14. *L'équation $R_{123} = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les équations* E *aient une solution commune* (autre que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$). Si en effet R_{12}^u n'est pas identiquement nul, l'équation de définition (14) montre que les conditions $R_{123} = 0$, $\prod_i f_3(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) = 0$ sont équivalentes. Dans le cas contraire, le résultant, que l'on peut regarder comme composé à l'aide des coefficients de R_{12}^u et de f_3, se réduit à 0, et d'autre part, il est manifeste que les équations E ont une solution, puisque les deux courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ ont une partie commune, laquelle coupe $f_3 = 0$ en un certain nombre de points.

15. Le résultant fourni par la méthode dialytique, telle qu'elle est indiquée par CAYLEY,[1] coïncide, au signe près, avec le résultant R_{123}. C'est ce que l'on voit en constatant: 1° que l'expression R de CAYLEY est de degré $m_2 m_3$ par rapport aux coefficients de f_1, d'où résulte que le rapport $\frac{R}{R_{123}}$ est indépendant de f_1, et pareillement de f_2, f_3; 2° que les deux expressions R, R_{123} se réduisent toutes deux à 1 pour $f_1 = x_1^{m_1}$, $f_2 = x_2^{m_2}$, $f_3 = x_3^{m_3}$.

16. Les conclusions auxquelles nous venons de parvenir s'étendent d'elles-mêmes au cas d'un nombre quelconque n d'inconnues. On peut, à cet égard, répéter identiquement les raisonnements précédents; cette fois, nous les présenterons sous une forme plus simple à certains égards en partant directement des équations rendues homogènes.

Soient $n+1$ polynômes $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$ respectivement par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Nous allons définir le résultant $R_{1,2,\ldots,n+1}$ de ces polynômes et démontrer que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant une permutation quelconque des indices $1, 2, \ldots, n+1$, on a

$$R_{\alpha\beta\gamma\ldots} = R_{1,2,\ldots,n+1}(-1)^{s m_1 m_2 \ldots m_{n+1}}, \tag{15}$$

où s est égal à 0 ou à 1 suivant que la substitution $\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n+1 \\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots \end{pmatrix}$ est ou non alternée.

Supposons pour cela que l'on ait défini le résultant de n équations homogènes à n inconnues. Ce sera un polynôme entier par rapport aux coefficients des différentes équations et dont le degré par rapport aux coefficients de chacune sera marqué par le produit des ordres de toutes les autres. Ce sera un invariant commun à tous les premiers membres. Egalé à zéro, il exprimera la condition nécessaire et suffisante pour que les équations aient une solution commune (non nulle). Enfin il ne changera pas si l'on change l'ordre des équations données, sauf dans le cas ou ces équations sont toutes d'ordre impair et la permutation effectuée non alternée, auquel cas il changera simplement de signe.

---

[1] *Cambridge and Dublin Mathematical Papers*, t. 3.

Revenant alors aux équations

$$\mathrm{E}\quad\left|\begin{array}{ll}(1) & f_1 = 0,\\ (2) & f_2 = 0,\\ \ldots & \ldots\\ (n+1) & f_{n+1} = 0,\end{array}\right.$$

nous considérons d'abord les n premières d'entre elles. En y faisant $x_{n+1} = 0$, nous aurons n équations à n inconnues dont nous pourrons former le résultant $R^0_{1,2,\ldots,n}$. De cette expression, nous déduirons, comme il a été expliqué plus haut, la forme $R^u_{1,2,\ldots,n}$. Egalée à zéro, cette forme exprime que l'équation linéaire $u_1x_1 + \ldots + u_{n+1}x_{n+1} = 0$ est vérifiée par une solution commune $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n+1}^{(i)}$ des n premières équations E. Elle peut être identiquement nulle: ceci arrivera alors et alors seulement, que les surfaces représentées par ces n équations auront en commun, non pas seulement un certain nombre de points, mais une multiplicité algébrique à au moins une dimension. Sinon, elle sera un produit de facteurs

$$R^u_{1,2,\ldots,n} = \mu\prod_i\left(u_1x_1^{(i)} + \ldots + u_{n+1}x_{n+1}^{(i)}\right),$$

chaque facteur sous le signe Π étant compté un nombre de fois égal au degré de multiplicité de la solution commune correspondante, et μ étant un nombre indépendant des u, mais dépendant du facteur de proportionnalité qui figure dans les x_i.

Le degré de la forme R^u par rapport aux u étant $m_1m_2\ldots m_n$, il est par cela même démontré que ce nombre est celui des solutions communes aux équations $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$.

Cela posé, formons le produit

$$(16)\qquad R_{1,2,\ldots,n+1} = \left(\frac{R^u_{1,2,\ldots,n}}{\prod_i\left(u_1x_1^{(i)} + \ldots + u_{n+1}x_{n+1}^{(i)}\right)}\right)^{m_{n+1}} P_{n+1},$$

$$P_{n+1} = \prod_i f_{n+1}\left(x_1^{(i)}, \ldots, x_{n+1}^{(i)}\right).$$

Ce produit est indépendant des u, ainsi que des déterminations choisies pour les $x^{(i)}$. On peut en particulier choisir ceux-ci de manière que $\mu = 1$ et définir notre quantité comme le produit

$$R_{1,2,\ldots,n+1} = \prod_i f_{n+1}\left(x_1^{(i)}, \ldots, x_{n+1}^{(i)}\right),$$

les quantités x étant définies par l'identité

$$\prod_i (u_1 x_1^{(i)} + \ldots + u_{n+1} x_{n+1}^{(i)}) = R''_{1,2,\ldots,n}.$$

L'expression $R''_{1,2,\ldots,n+1}$ est donc une fonction entière des coefficients de $R''_{1,2,\ldots,n}$ et des coefficients de f_{n+1}, de degré m_{n+1} par rapport aux premiers, de degré $m_1 m_2 \ldots m_n$ par rapport aux seconds; par suite une fonction entière des coefficients des équations E, et dont le degré par rapport aux coefficients de chaque équation est marqué par le produit des ordres des autres. C'est un invariant commun aux polynômes $f_1, \ldots, f_{n+1}$, car dans l'expression (16) tous les facteurs sont invariants. Son expression symbolique comprend $m_1 m_2 \ldots m_{n+1}$ facteurs déterminants symboliques. On saurait d'ailleurs former cette expression symbolique si l'on savait trouver pour le résultant de deux formes binaires une expression essentiellement équivalente.

17. $R_{1,2,\ldots,n+1} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations E aient une solution commune non nulle. C'est ce qui résulte immédiatement de la formule (16) si $R''_{1,2,\ldots,n}$ n'est pas identiquement nul. Si au contraire on a $R''_{1,2,\ldots,n} \equiv 0$, on aura aussi $R_{1,2,\ldots,n+1} = 0$, puisque $R_{1,2,\ldots,n+1}$ est une fonction homogène des coefficients de $R''_{1,2,\ldots,n}$. D'ailleurs les équations E auront une solution commune, car les n premières d'entre elles définissent une multiplicité algébrique à au moins une dimension, laquelle coupe nécessairement la surface $f_{n+1} = 0$.

Il est donc légitime de nommer *résultant* cette expression $R_{1,2,\ldots,n+1}$.

18. Soient maintenant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta, \theta$ les indices $1, 2, 3, \ldots, n+1$ rangés dans un ordre différent et formons l'expression, analogue à $R_{1,2,3,\ldots,n+1}$

$$R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\eta,\theta} = \left[\frac{R''_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\eta}}{\prod_k (u_1 x_1^{(k)} + \ldots + u_{n+1} x_{n+1}^{(k)})} \right]^{m_\theta} P_\theta, \tag{16'}$$

$$P_\theta = \prod_k f_\theta(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n+1}^{(k)}).$$

Le rapport $\dfrac{R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta}}{R_{1,2,3,\ldots,n+1}}$ est indépendant des coefficients de l'une quelconque, f_1 par exemple, des équations E. En général, en effet, les équations $E_2, E_3, \ldots, E_{n+1}$ ont leurs $m_2 m_3 \ldots m_{n+1}$ solutions communes distinctes

(puisqu'en y faisant $x_{n+1} = 1$, de manière à les prendre sous forme non homogène, 1° il n'y aura pas, en général, de solutions commune infinie, le résultant que nous avons appelé $R^0_{2,3,\ldots,n+1}$ n'étant pas identiquement nul; 2° le résultant des équations $E_2, E_3, \ldots, E_{n+1}$ et de leur déterminant fonctionnel, qui est une fonction entière des coefficients de ces équations, n'est pas identiquement nul, ainsi qu'on le voit en prenant pour ces équations des produits de facteurs linéaires quelconques). Considérées comme équations entre les coefficients de f_1, les équations $R_{\alpha,\beta,\ldots,\theta} = 0$, $R_{1,2,\ldots,n+1} = 0$ représentent donc la même multiplicité algébrique, en général sans partie multiple; elles coïncident donc bien à un facteur près indépendant de f_1. Cette conclusion, établie dans le cas où les n dernières équations E ont leurs solutions communes distinctes, subsiste par cela même d'une façon absolument générale.

On peut dès lors, dans l'évaluation du rapport $\frac{R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta}}{R_{1,2,\ldots,n+1}}$, supposer les polynômes $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ remplacés respectivement par les puissances $m_1{}^{\text{ème}}, m_2{}^{\text{ème}}, \ldots, m_{n+1}{}^{\text{ème}}$ d'autant de polynômes du premier degré.

D'autre part, le résultant $R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta}$ des formes $f_1^p, f_2, \ldots, f_{n+1}$ est la puissance $p^{\text{ème}}$ du résultant $R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta}$ relatif aux formes $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$. Cela est évident si $\theta = 1$. Dans le cas contraire, on voit immédiatement d'après la formule (16′) qu'il suffit d'établir la propriété en question pour la quantité $R^u_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\eta}$. Or celle-ci, se déduisant du résultant de n équations homogènes à n inconnues ne change pas par une substitution alternée, substitution par laquelle nous pouvons rendre η égal à 1.

Dès lors le rapport $\frac{R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta}}{R_{1,2,3,\ldots,n+1}}$ est la puissance $m_1 m_2 \ldots m_{n+1}{}^{\text{ème}}$ de ce qu'il serait si les polynômes donnés étaient du premier degré. Mais, dans ce cas, le résultant, qui se réduit au déterminant des $(n+1)^2$ coefficients, est une fonction alternée par rapport aux indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$. Nous pouvons donc écrire

$$R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta} = (-1)^{s m_1 m_2 \ldots m_{n+1}} R_{1,2,3,\ldots,n+1} \tag{17}$$

et nous aurons ainsi démontré toutes les propriétés énoncées.

19. Les formules (16) et (17) permettent de comparer entre eux les produits $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$. Que devient cette comparaison lorsque

nos équations ont des solutions communes? Prenons, pour simplifier, le cas de trois équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ représentant trois courbes qui ont un certain nombre de points communs A. Sur un cycle de f_1 ayant pour origine un de ces points, f_2 sera de l'ordre l et f_3 de l'ordre l', de sorte que le nombre des intersections B de f_1, f_2 non communes avec f_3 sera $m_1 m_1 - \Sigma l$ et le nombre des intersections C de f_1 et de f_3, non communes avec f_2, $m_1 m_3 - \Sigma l'$. Proposons-nous de comparer le produit des valeurs de f_3 aux points B avec le produit des valeurs de f_2 aux points C.

Remplaçons, dans ce but, f_3 par $f_3 + \lambda\varphi_3$ (φ_3 étant un polynôme quelconque de degré m_3); nous voyons que le produit des valeurs de f_3 aux points B, multiplié par le produit des valeurs de φ_3 aux points A, égale le coefficient de $\lambda^{\Sigma l}$ dans le produit P_3 relatif aux polynômes $f_1, f_2, f_3 + \lambda\varphi_3$, lequel produit est égal, aux facteurs près dont nous avons donné l'expression plus haut, au produit des valeurs de f_2 aux points $f_1 = 0$, $f_3 + \lambda\varphi_3 = 0$. Ces derniers peuvent se diviser en deux catégories: $m_1 m_3 - \Sigma l'$ qui, pour λ infiniment petit, tendent vers les points C et $\Sigma l'$ qui tendent vers les points A.

Sur chaque cycle de f_1 ayant pour origine un point A,[1] donnons-nous les développements de f_2, f_3, φ_3:

$$f_2 = t^l(a + bt + \ldots),$$

$$f_3 = t^{l'}(a' + b't + \ldots),$$

$$\varphi_3 = \alpha + \beta t + \ldots.$$

Les l' valeurs de t correspondant aux points d'intersection de f_1 avec $f_3 + \lambda\varphi_3$ auront leurs parties principales données par $a't^{l'} + \lambda\alpha = 0$, de sorte que leur produit aura pour valeur principale $(-1)^{l'}\frac{\lambda\alpha}{a'}$ et le produit des valeurs de f_2, $(-1)^{ll'}\lambda^l\alpha^l\frac{a^{l'}}{a'^l}$. Si nous supprimons le facteur λ^l et remarquons que les facteurs α^l donnent le produit des valeurs de

[1] Il est bien entendu que les développements de x_1, x_2, x_3 sur le cycle doivent être tels que, pour $t = 0$, on trouve les valeurs mêmes qui figurent dans les formules (13) et suivantes (et non simplement des valeurs proportionnelles).

φ_3 aux points A, nous voyons que le cycle en question figurera par le facteur $(-1)^{n'} \frac{a^{l'}}{a'^{l}}$, c'est à dire, au signe près, la *vraie valeur* de $\frac{f_2^{l'}}{f_3^{l}}$ sur le cycle en question.[1] Tel est donc le facteur qu'il faudra, dans la formule de comparaison, introduire pour chaque intersection commune que l'on supprimera.

20. En particulier, ceci nous permettra de voir ce que devient la formule

$$(10') \qquad R = \prod_i f_3(x^{(i)}, y^{(i)}) R_{12}^{0^{m_3}}$$

qui exprime le résultant en supposant connus les points d'intersection de $f_1 = 0$ et de $f_2 = 0$, lorsqu'un ou plusieurs de ces points sont à l'infini.

Soient

$$x^{(i)}, y^{(i)}, 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_1 m_2 - \mu)$$

les points communs de f_1, f_2 situés à distance finie,

$$a^{(k)}, b^{(k)}, 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

les points communs à l'infini. On a

$$(14') \quad R = \prod_{(i)} f_3(x^{(i)}, y^{(i)}) \prod_k f_3^0(a^{(k)}, b^{(k)}) \left[\frac{R_{12}^u}{\prod_i (u_1 x^{(i)} + u_2 y^{(i)} + u_3) \prod_k (u_1 a^{(k)} + u_2 b^{(k)})} \right]^{m_3},$$

et c'est la quantité $\frac{R_{12}^u}{\prod_i (u_1 x^{(i)} + u_2 y^{(i)} + u_3) \prod_k (u_1 a^{(k)} + u_2 b^{(k)})}$ qu'il nous reste à évaluer. Or R_{12}^u est le résultant des polynômes $f_1, f_2, u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ Autrement dit, si

$$\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \xi_3^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m_1)$$

désignent les points d'intersection de $f_1 = 0$, $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, on aura

$$(18) \quad R_{12}^u = \prod_h f_2(\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \xi_3^{(h)}) \left[\frac{f_1(u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2)}{\prod_h (v_1 \xi_1^{(h)} + v_2 \xi_2^{(h)} + v_3 \xi_3^{(h)})} \right]^{m_2}.$$

[1] D'après la note précédente, il est clair que cette vraie valeur dépendra, comme cela doit être, du facteur de proportionnalité qui figure dans les coordonnées de l'origine du cycle.

Divisant cette valeur par le dénominateur

$$\prod_i (u_1 x^{(i)} + u_2 y^{(i)} + u_3) \prod_k (u_1 a^{(k)} + u_2 b^{(k)}),$$

nous allons pouvoir prendre pour la droite $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ la droite de l'infini $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 1$. Dans ces conditions, en effet, les points $\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \xi_3^{(h)}$ sont, d'une part,[1] les points $a^{(k)}, b^{(k)}, 0$, d'autre part, les autres points à l'infini $(a^{(k')}, b^{(k')}, 0)$, points dont nous pouvons supposer les coordonnées choisies de manière à ce que le produit

$$\prod_{k'} (v_1 a^{(k')} + v_2 b^{(k')}) = f_1'^{0}(v_2, -v_1)$$

soit égal au quotient de $f^0(v_2, -v_1)$ par[2] $\prod (v_1 a^{(k)} + v_1 b^{(k)})$. Dans ces conditions, le second facteur de la valeur (18) de R_{12}^u devient égal à l'unité. Quant au rapport $\dfrac{\prod_h f_2(\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \xi_3^{(h)})}{\prod_i (u_1 x^{(i)} + u_2 y^{(i)} + u_3) \prod_k (u_1 a^{(k)} + u_2 b^{(k)})}$, il se présente sous la forme $\dfrac{0}{0}$, mais nous venons d'apprendre dans le numéro précédent à lever cette indétermination, et nous obtenons

$$(19) \qquad R = \prod_i f_3(x^{(i)}, y^{(i)}) \prod_k f_3^0(a^{(k)}, b^{(k)}) \left(\prod f_2^0(a^{(k')}, b^{(k')}) \prod L\right)^{m_3}.$$

Les facteurs L sont relatifs aux différentes branches infinies de f_1. Si sur une telle branche, f_2 est d'ordre l, x_3 d'ordre l', le facteur L sera la vraie valeur de $\dfrac{f_2^l}{x_3^{l'}}$, multipliée par $(-1)^{ll'}$.

Le facteur $\prod f_2^0(a^{(k')}, b^{(k')})$ se calcule sans que l'on connaisse les quantités $a^{(k')}, b^{(k')}$. C'est le résultant des formes binaires $f_1'^{0}, f_2^0$.

---

[1] Ces points ne sont pas, il est vrai, identiques avec les points $a^{(k)}, b^{(k)}, 0$ considérés tout à l'heure: ils en diffèrent par les ordres de multiplicité. Les points $a^{(k)}, b^{(k)}$ sont comptés dans la formule (14') avec l'ordre de multiplicité qu'ils ont comme points communs à f_1, f_2; ici on doit leur attribuer la multiplicité avec laquelle ils figurent comme points à l'infini de f_1.

[2] Il est bien entendu que le produit $\prod_l (v_1 a^{(k)} + v_2 b^{(k)})$ n'est pas celui qu'on déduirait du produit $\prod_k (u_1 a^{(k)} + u_2 b^{(k)})$ qui figure dans (14') en changeant les u en v, ainsi qu'il résulte de la note précédente.

21. Ces résultats s'étendent immédiatement à un nombre quelconque d'équations. Le rôle que jouait tout à l'heure la courbe $f_1 = 0$ sera joué par la courbe représentée, dans l'espace à n dimensions, par les $(n - 1)$ premières équations données.

22. Les conclusions du n° 19 fournissent une identité qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier directement, et qui peut être utile dans certains raisonnements. Soient encore les trois courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ ayant en commun un point x_0, y_0. Sur un cycle de $f_1 = 0$ en ce point, f_2 sera de l'ordre k, f_3 de l'ordre l, et le rapport $\frac{f_2^l}{f_3^k}$ aura une certaine limite L. De même, sur un cycle de f_2 au même point, le rapport $\frac{f_2^{l'}}{f_1^{k'}}$ (en désignant par k' et l' les ordres de f_3 et de f_1 sur ce cycle) aura une certaine limite L', et, sur un cycle de f_3, le rapport $\frac{f_1^{l''}}{f_2^{k''}}$ (où k'', l'' sont les ordres de f_1, f_2) aura une limite L''. Il résulte évidemment du n° 19 que le produit des quantités L par les quantités L' et par les quantités L'' est égal à $(-1)^{\Sigma kl + \Sigma k'l' + \Sigma k''l''}$, du moins si le point x_0, y_0 est le seul point commun; mais on peut toujours supposer qu'il en est ainsi, en ajoutant aux premiers membres des équations de ces courbes des termes de degré assez élevés en $x - x_0$, $y - y_0$ pour ne pas changer les quantités L, L', L''.

II.

23. Nous avons étudié le résultant de plusieurs équations, c'est à dire une certaine fonction symétrique des solutions communes à ces équations. De pareilles quantités, susceptibles de recevoir des applications géométriques plus ou moins simples, ont été considérées par différents auteurs, auxquels elles ont fourni une série de théorèmes de géométrie.

C'est ainsi que Laguerre[1] a énoncé des théorèmes sur le produit

[1] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, tome 60, pag. 71—73; 1865. — Bulletin de la Société Philomatique, p. 140; 1870.

des normales menées d'un point à une courbe, sur le produit des distances d'un point aux intersections d'une courbe et d'un cercle, etc.

Un certain nombre de ces théorèmes et d'autres analogues ont été repris par M. ELLING HOLST.[1]

Les fonctions symétriques qui font l'objet de ces différentes propositions appartiennent à une catégorie particulière: il s'agit toujours du produit des valeurs que prend une fonction rationnelle déterminée aux différents points communs à deux courbes données. Au contraire, d'autres résultats du même genre sont relatifs à l'évaluation, non d'un produit, mais d'une somme de fonctions rationnelles. Tel est, par exemple, le théorème de JACOBI sur la quantité $\sum \frac{U}{D(f, \varphi)}$ (où $D(f, \varphi)$ est le déterminant fonctionnel des polynômes f, φ).

Ces différentes recherches ont été reprises et complétées par M. HUMBERT dans une série d'importants mémoires insérés principalement au Journal de Mathématiques pures et appliquées.[2] Plus généralement, M. HUMBERT calcule, à l'aide de la théorie des fonctions fuchsiennes, les intégrales qui interviennent dans le théorème d'ABEL et dont l'expression permet d'obtenir le produit ou la somme de fonctions rationnelles, étendus aux points d'intersection de deux courbes, ou d'une courbe et d'une surface.

Je me propose de faire voir que tous les résultats que nous venons d'énumérer peuvent être considérés comme dérivant des propriétés du résultant.

24. Lorsque la fonction symétrique à évaluer affecte la forme d'un produit, nous sommes immédiatement ramenés au calcul d'un résultant. Le produit

$$\prod_i \frac{F(x^{(i)}, y^{(i)})}{\Phi(x^{(i)}, y^{(i)})}$$

[1] Math. Annalen tome 11, pag. 341—346; 1877. — Bull. de la Soc. Math. de France, tome 8, pag. 52—59; 1879.

[2] *Sur le théorème d'Abel et quelques unes de ses applications géométriques*, Journal de Math. pures et appliquées, 4e série, tome 3, pag. 327—405; tome 5, pag. 81—134; tome 6, pag. 233—292. — *Sur les courbes cycliques de direction*, ibid. tome 5, pag. 129. *Propriétés des arcs des courbes algébriques planes ou gauches*, ibid. 5e série, tome 1, pag. 181; etc., etc. — Les théorèmes de M. HUMBERT ont été démontrés par une autre voie dans le *Traité des fonctions algébriques et de leurs intégrales* de MM. APPELL et GOURSAT.

étendu aux points d'intersection des courbes f, φ est, à un facteur près dépendant des termes du plus haut degré des polynômes f, φ, F, Φ, le quotient des résultants des polynômes f, φ, F d'une part, f, φ, Φ de l'autre; et les autres formes que nous connaissons pour ces résultants nous donneront autant de transformations du produit en question.

Soit, par exemple, le produit

$$\Pi\psi(x, y) \tag{20}$$

des valeurs prises par le polynôme entier $\psi(x, y)$ aux points d'intersection des courbes $f = 0$, $\varphi + P\psi = 0$. On est conduit à exprimer ce produit par le produit

$$\Pi(\varphi + P\psi) \tag{21}$$

étendu aux points d'intersection des courbes f, ψ, lequel est indépendant du polynôme entier P.

Le rapport des deux produits (20), (21) si le résultant des termes du plus haut degré des polynômes f, $\varphi + P\psi$ n'en dépend pas, ce qui arrivera lorsque $P\psi$ sera de degré inférieur à φ.

Lorsque la courbe $\psi = 0$ est un cercle, cette remarque prend la forme suivante: *Si une courbe fixe $f = 0$ est coupée par une autre variable, mais dont les points à l'infini et les points d'intersection avec un cercle $\psi = 0$ sont fixes, le produit des puissances, par rapport au cercle ψ, de la courbe $f = 0$ et de la courbe variable est constant.*

25. C'est encore dans le même ordre d'idées que rentre le théorème de Laguerre: *Si par un point $O(x_0, y_0)$ pris dans le plan d'une courbe $f = 0$, on mène un cercle quelconque, le produit des distances du point O aux points d'intersection*[1] *est* $(2R)^m f_O$.

On a en effet à évaluer dans ce cas le produit

$$P = \Pi[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = (2R)^{2m}\Pi[(x - x_0)\sin\theta - (y - y_0)\cos\theta]$$

[1] Il y a ici un léger désaccord avec le résultat donné par Laguerre; cela tient à ce que nous supposons la quantité (22) (voir ci-dessous) égale à 1 et non à 2^m, ce qui était la supposition de Laguerre. La forme que nous adoptons ainsi pour f est la forme »normale» de M. Elling Holst (loc. cit.).

étendu aux points d'intersection des courbes $f = 0$,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - 2R\big((x - x_0)\sin\theta - (y - y_0)\cos\theta\big) = 0,$$

ce qui nous ramène à la remarque précédente en faisant

$$\varphi = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \qquad \psi = (x - x_0)\sin\theta - (y - y_0)\cos\theta, \qquad P = 2R.$$

Le résultant des termes de plus haut degré

$$f^0(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_m y^m,$$
$$x^2 + y^2$$

des polynômes f, φ est la quantité

$$(22) \qquad f^0(1, i) f^0(1, -i) = (a_0 - a_2 + a_4 - \ldots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots)^2$$

que nous supposons égale à 1; de sorte que P est le résultant des trois polynômes f, $\varphi - 2R\psi$, ψ, ou, ce qui revient au même, f, φ, ψ. Nous pouvons évaluer ce dernier en formant le produit des valeurs de $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ aux points $f = 0$, $\psi = 0$, lequel s'obtient aisément en posant $x - x_0 = \rho\cos\theta$, $y - y_0 = \rho\sin\theta$, et a la valeur

$$\left[\frac{f_0}{f^0(\cos\theta, \sin\theta)}\right]^2.$$

Comme le résultant des termes de plus haut degré des polynômes f, ψ est précisément $f^0(\cos\theta, \sin\theta)$, on trouve bien le résultat annoncé.

Une méthode semblable peut s'appliquer aux deux produits

$$\Pi[(x - x_0) \pm i(y - y_0)]$$

relatifs aux points d'intersection de la droite et du cercle et, par le quotient de ces deux produits,[1] conduit au second théorème de LAGUERRE: *L'orientation du système des droites qui vont du point O aux points d'intersection est la même que celle des asymptotes de la courbe $f = 0$.*

---

[1] On sait que l'orientation θ du système des droites allant de l'origine aux points $x^{(h)}$, $y^{(h)}$, c'est à dire la somme des angles que font ces droites avec l'axe des x, est donnée par la formule

$$e^{2i\theta} = \prod_h \frac{x^{(h)} + iy^{(h)}}{x^{(h)} - iy^{(h)}}.$$

26. Soit encore à trouver le produit des longueurs des sécantes menées du point O à la courbe $f=0$ de manière à la couper sous un angle donné V et l'orientation du système de ces droites.

Les points $x^{(h)}, y^{(h)}$ $(h=1, 2, \ldots, m^2)$ seront définis par les équations

$$f(x, y) = 0, \tag{23}$$

$$[(x-x_0)f'_y - (y-y_0)f'_x]\sin V - (x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z)\cos V = 0 \tag{24}$$

et nous considérerons les produits

$$\Pi[(x-x_0) \pm i(y-y_0)].$$

Prenons d'abord le résultant R^0 relatif aux polynômes (23), (24). En décomposant $f^0(x, y)$ en facteurs $b^{(k)}x - a^{(k)}y$ et substituant $a^{(k)}, b^{(k)}$ dans les termes de plus haut degré de (24), on trouve pour ce résultant (en désignant par Δ le discriminant de f^0)

$$\pm \Delta \sin^m V \prod_k (a^{(k)2} + b^{(k)2}) = \pm \Delta \sin^m V f^0(1, i) f^0(1, -i).$$

Nous connaissons d'ailleurs le résultant R^0 pour les équations (23) et

$$x - x_0 + i(y-y_0) = 0 \tag{25}$$

lequel est $f^0(1, i)$, de sorte que nous sommes ramenés au calcul du produit des résultats de substitution, dans le premier membre de l'équation (24), des solutions communes à (23) et à (25). Or, moyennant ces dernières, le premier membre de (24) peut s'écrire sous l'une des deux formes

$$-(x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z)e^{iV}, \tag{26}$$

$$-(x-x_0)(f'_x + if'_y)e^{iV}. \tag{27}$$

Partons de la première forme: elle nous représente, à un facteur près, le résultant des polynômes $f, x-x_0+i(y-y_0)$ et $x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z$, c'est à dire le produit $\Pi'((x-x_0)+i(y-y_0))$ relatif aux tangentes menées du point O à la courbe, multiplié par le résultant des termes de plus haut degré des polynômes $f, x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z$, lequel est égal au produit de

$\frac{\Delta}{\sqrt{\Pi(a^{(k)2} + b^{(k)2})}}$ par le produit Π_t des distances du point O aux asymptotes de $f = 0$. Nous obtenons donc

$$\Pi((x - x_0) + i(y - y_0)) = \Pi'(x - x_0 + i(y - y_0))\frac{e^{miV}}{\sin^m V}\sqrt{\frac{f^0(1, i)}{f^0(1, -i)}}\,\Pi_d.$$

La seconde forme (27) se traite par des procédés tout semblables et nous donne

$$\Pi(x - x_0 + i(y - y_0)) = f_0\Pi(\xi - x_0 + i(\eta - y_0))\frac{e^{miV}}{\sin^m V f^0(1, -i)},$$

ξ, η désignant les coordonnées des foyers réels de la courbe.

Si, dans ces formules nous changeons i en $-i$, elles nous feront connaître le produit $\Pi(x - x_0 - i(y - y_0))$. En multipliant, nous aurons le produit des longueurs des sécantes, égal au produit des longueurs des tangentes, multiplié par le produit des obliques menés du point O aux asymptôtes et les coupant sous l'angle V, ou encore à f_0 multiplié par le produit des distances du point O aux foyers réels et divisé par $\sin^m V$ (en supposant $f^0(1, i)f^0(1, -i) = 1$).

En divisant, au contraire, les deux produits conjugués l'un par l'autre, on a l'orientation du système de sécantes, égale à l'orientation des tangentes, plus celle des asymptôtes, plus m fois l'angle V; l'orientation des tangentes étant la même que celle des droites qui vont aux foyers réels.

Ces théorèmes sont établis, il est vrai, dans l'hypothèse où la courbe donnée n'a pas de point double. Mais, dans le cas contraire, les points doubles figureraient avec le même ordre de multiplicité comme extrémité de tangentes, ou de normales, ou comme foyers. Ils s'élimineraient par conséquent des résultats.

27. D'autres théorèmes du même type ont encore été donnés dans les mémoires précédemment cités. Nous les laissons de côté pour rechercher si les propriétés du résultant nous permettent de calculer des fonctions symétriques autres que des produits.

Il y a tout d'abord lieu d'observer que la remarque donnée dans la première partie, n° 8, permet de ramener à la recherche d'un résultant l'expression de toute fonction symétrique des solutions communes à plusieurs équations donnée sous forme invariante.

Nous nous bornerons ici à considérer les fonctions symétriques qui se présentent comme la somme des valeurs que prend une certaine fonction rationnelle aux points communes à plusieurs courbes ou surfaces. Ces quantités se ramènent immédiatement à des produits à l'aide de l'identité

$$\frac{U}{V} = \frac{d}{d\lambda_{\lambda=0}} \log(V + \lambda U). \tag{28}$$

Supposons que U et V soient deux polynômes homogènes du même degré p aux trois variables x, y, z, et proposons-nous de calculer la somme des valeurs de $\frac{U}{V}$ aux points d'intersection des deux courbes $f = 0$, $\varphi = 0$.

Nous devons admettre tout d'abord que V ne s'annule en aucun de ces points, sans quoi la valeur correspondante de $\frac{U}{V}$ serait, en général, infinie ou indéterminée. Dans ces conditions, le produit $\Pi(V + \lambda U)$ étendu aux points $(f = 0, \varphi = 0)$ se calculera à l'aide du produit $\Pi\varphi$ étendu aux points

$$(f = 0, \ V + \lambda U = 0). \tag{29}$$

De ces derniers, certains seront fixes, ceux qui seront communs aux trois courbes $f = 0$, $U = 0$, $V = 0$. Ils donneront dans notre produit des facteurs indépendants de λ, lesquels ne formeront aucun terme à la dérivée logarithmique. Nous n'aurons donc à considérer que les points d'intersection (29) mobiles, lesquels seront, pour λ très petit, infiniment voisins des intersections de $f = 0$ avec $V = 0$, mais non confondus avec elles. En particulier, nous n'aurons pas à faire entrer en ligne de compte les points où V s'annule sans que $\frac{U}{V}$ soit infini.

Considérons donc un cycle de la courbe $f = 0$ sur lequel $\frac{U}{V}$ est infini. Les coordonnées homogènes x, y, z seront données par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable t, nulle à l'origine du cycle. Soient alors

$$\frac{U}{V} - -\frac{1}{\lambda} = t^{-k}(A + Bt + \ldots) = \frac{1}{\psi(t)}, \tag{30}$$

$$\frac{d \log \varphi}{dt} = a + bt + \ldots.$$

La courbe $V + \lambda U = 0$ aura, pour λ très petit, k points d'intersection avec notre cycle infiniment voisins de son origine, et correspondant aux k racines infiniment petites de l'équation (30).

Supposons d'abord, pour simplifier, $k = 1$. Alors la courbe $V + \lambda U = 0$ coupera le cycle en un point μ dont le paramètre t aura pour valeur principale $t = -\lambda A$, de sorte qu'on a

$$\frac{d \log \varphi_\mu}{d\lambda} = \frac{d \log \varphi_\mu}{dt_\mu} \frac{dt_\mu}{d\lambda} = -aA + \ldots .$$

Donc le cycle en question fournira à la quantité $\frac{d \Sigma \log \varphi}{d\lambda}$ un terme égal à $-aA$, c'est à dire *au coefficient de* $\frac{1}{t}$ *dans le développement de* $-\frac{U}{V} \frac{d \log \varphi}{dt}$, ou à *l'intégrale* $-\frac{1}{2i\pi} \int \frac{U}{V} d \log \varphi$ prise le long d'un contour infiniment petit entourant le point analytique origine du cycle.

La même conclusion subsiste pour une valeur quelconque de k. C'est ce qui peut se voir en traçant dans le plan de la variable t un cercle de petit rayon autour du point $t = 0$. La somme des valeurs de $\frac{d \log \varphi}{d\lambda} = -\frac{\frac{d \log \varphi}{dt}}{\frac{d\psi}{dt}}$ aux points racines de l'équation (30) situés à l'intérieur de ce cercle (et, si le cercle a été pris une fois pour toutes, les k points racines infiniment voisins de l'origine seront à son intérieur pour λ suffisamment petit) sera l'intégrale $-\frac{1}{2i\pi} \int \frac{1}{\psi(t) + \lambda} \frac{d \log \varphi}{dt} dt$ prise le long du cercle, laquelle, pour $\lambda = 0$, donnera bien $\int \frac{U}{V} d \log \varphi$.

Nous constaterons le même fait directement en posant $\lambda = \nu^k$. t est alors une série en μ commençant par un terme du premier degré. Les k valeurs infiniment petites de t s'obtiennent en multipliant μ par les différentes racines $k^{\text{èmes}}$ de l'unité. Si d'autre part on a

$$F(t) = \frac{1}{\psi(t)} \frac{d \log \varphi}{dt} = \frac{\alpha_{-k}}{t^k} + \frac{\alpha_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{-1}}{t} + \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots ,$$

il viendra

$$(51)\qquad \frac{d\log\varphi}{d\lambda} = -\frac{1}{\varphi(t)}\frac{d\log\varphi}{dt}\frac{dt}{d\log\lambda}$$

$$= \frac{\nu}{k}\frac{dt}{d\nu}\left(\frac{\alpha_{-k}}{t^k} + \frac{\alpha_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{-1}}{t} + \alpha_0 + \alpha_G t + \ldots\right).$$

Or tous les termes de $F(t)$, autres que $\frac{\alpha_{-1}}{t}$, sont des dérivées de fonctions rationnelles de t, et par suite, après multiplication par $\frac{\nu}{k}\frac{dt}{d\nu}$, ne donneront pas de termes indépendants de ν. Ils s'élimineront donc, d'après les propriétés de l'équation binôme, lorsqu'on fera la somme des valeurs que prend l'expression (31) en y multipliant ν successivement par les différentes racines $k^{\text{ème}}$ de l'unité. Reste le seul terme $\frac{\alpha_{-1}}{t}$, qui donnera α_{-1}; d'où la conclusion annoncée.

28. Nous évaluons ainsi la dérivée logarithmique par rapport à λ du produit des valeurs de φ aux points ($f = 0$, $V + \lambda U = 0$). Celui-ci diffère du produit primitif par deux facteurs, une puissance de la quantité μ (formule (13), n° 13, première partie) relative aux polynômes f, φ, laquelle est indépendante de λ et ne figure pas dans la dérivée logarithmique, et la puissance $n^{\text{ème}}$ (n étant le degré de φ) de la quantité analogue relative aux polynômes f, $V + \lambda U$. Cette dernière donnera un terme nC, où C est indépendant de φ. Nous arrivons donc à la formule finale

$$(32)\qquad \sum \frac{U}{V} = -\mathrm{S}\,\mathcal{E}\,\frac{U}{V}\frac{d\log\varphi}{dt} + nC,$$

où le signe Σ est relatif aux points ($f = 0$, $\varphi = 0$), le signe S aux cycles de $f = 0$ sur lesquels $\frac{U}{V}$ est infini; le symbole $\mathcal{E}\frac{U}{V}\frac{d\log\varphi}{dt}$ désignant le résidu de $\frac{U}{V}d\log\varphi$, c'est à dire le coefficient de $\frac{1}{t}$ dans le développement de $\frac{U}{V}\frac{d\log\varphi}{dt}$.

Dans le cas le plus simple, où les cycles qui interviennent dans le

second membre sont tous ordinaires, V ayant aux origines de ces cycles des zéros simples, cette formule s'écrit

$$(32') \qquad \sum \frac{U}{V} = -\mathrm{S}\frac{U}{\varphi}\frac{D(f,\varphi)}{D(f,V)} + nC$$

où $D(P, Q)$ désigne le déterminant fonctionnel des fonctions P, Q par rapport aux variables x, y. Elle correspond, au fond, à la formule (13) du premier mémoire de M. Humbert sur le théorème d'Abel.[1]

29. Il n'y a pas lieu de chercher une interprétation géométrique pour la constante C, car celle-ci dépend du facteur de proportionnalité qui figure dans les coordonnées homogènes x, y, z. Ce facteur est effectivement une série en t qui donne un terme dans la dérivée $\frac{d\log\varphi}{dt}$. Mais nous pouvons obtenir une expression simple de C en faisant $\varphi = V$. Nous voyons alors que la formule (32) peut s'écrire

$$\sum \frac{U}{V} = -\mathrm{SE}\frac{U}{V}\frac{d\left(\log\varphi - \frac{n}{p}\log U\right)}{dt}$$

(p étant le degré commun de U et de V).

Ce procédé de détermination de la constante C, reposant uniquement sur la disparition du premier membre de (32) lorsque $\varphi = U$, peut être appliqué plus simplement si U se décompose en facteurs. On pourra alors évaluer C en remplaçant φ par l'un de ces facteurs.[2]

En particulier, si $\frac{U}{V}$ s'annulle à l'infini, on annulera C en représentant les cycles du second membre en coordonnées absolues ($z = 1$). C'est, par exemple, le cas du théorème de Jacobi, où V est le déterminant fonctionnel $D(f, \varphi)$. Comme on a

$$\frac{dx}{f'y} = \frac{dy}{-f'x} = -\frac{d\varphi}{D(f,\varphi)},$$

[1] Journal de Mathématiques, 4e série, tome 3, page 346.

[2] Dans le cas où la courbe est représentée à l'aide des fonctions fuchsiennes ainsi que le fait M. Humbert, on voit aisément que la constante C est égale à la somme des intégrales $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{U}{V} d\log(\gamma t + \delta)$ étendues aux différents côtés du polynôme fuchsien, $\left(t, \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)$ désignant la substitution correspondant à chaque côté.

la différentielle $\frac{U}{V} d \log \varphi$ se réduit à $-\frac{U}{\varphi} \frac{dx}{f'_y}$ et ne devient pas infinie aux points $V = 0$ sauf si ces points sont des points multiples, ce que l'on peut toujours éviter en remplaçant f par $f + h\varphi$ (ce qui ne change pas $D(f, \varphi)$). La courbe $f + h\varphi = 0$ n'a en effet pour h quelconque, aucun point double, à moins que les courbes $f = 0$, $\varphi = 0$ n'aient un point double commun ou une branche entière commune, ce qui est exclu par la nature même de la question. Si donc V est de degré inférieur à $D(f, \varphi)$, ce qui entraîne $C = 0$, la formule (32′) nous donne bien $\sum \frac{U}{D(f, \varphi)} = 0$.

30. On peut se demander par quoi peuvent être remplacées les résultats précédents lorsque V s'annulle en un ou plusieurs points communs aux courbes $f = 0$, $\varphi = 0$.

A cet effet, on remplacera la courbe φ par une courbe voisine φ_1 ne passant pas par les points où $V = 0$, et on fera tendre φ_1 vers φ.

Si d'abord on considère un cycle de $f = 0$ où V s'annulle, mais sans que $\frac{U}{V}$ devienne infini, on voit immédiatement par ce procédé que l'on doit prendre pour valeur de $\frac{U}{V}$, dans le premier membre de la formule (32), la *vraie valeur* de cette quantité sur le cycle.

Supposons maintenant que la courbe $\varphi = 0$ passe par un ou plusieurs points de la courbe $f = 0$ où $\frac{U}{V}$ soit infini et soit C un cycle ayant pour origine tel point. La courbe auxiliaire $\varphi_1 = 0$ coupera la courbe $f = 0$ en un certain nombre de points P' situés sur les cycles C et en des points P'' non situés sur ces cycles. Nous mettrons à part, dans le premier membre de la formule (32), les termes qui se rapportent aux points P' et nous les ferons passer dans le second membre pour les joindre aux termes $\mathrm{E}\frac{U}{V}\frac{d \log \varphi_1}{dt}$ relatifs aux cycles C correspondants.

Soit

$$\frac{U}{V} = \frac{a_{-k}}{t^k} + \frac{a_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \ldots$$

le développement de $\frac{U}{V}$ sur un cycle C; ce cycle est coupé par la courbe

$\varphi_1 = 0$ en μ points $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$, les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ tendent vers o lorsque φ_1 tend vers φ; de sorte qu'on a

$$\frac{d}{dt}\log\varphi = -\frac{\mu}{t} + P(t),$$

$$\frac{d}{dt}\log\varphi_1 = -\frac{1}{t-t_1} - \frac{1}{t-t_2} - \ldots - \frac{1}{t-t_\mu} + P_1(t),$$

$P(t)$, $P_1(t)$ étant deux développements en t dont le second a pour limite le premier. Le cycle C fournira à la formule (32), modifiée comme nous l'avons dit tout à l'heure, le terme

$$(33)\qquad \mathbf{E}\left[\left(\frac{a_{-k}}{t^k} + \frac{a_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots\right)\left(-\frac{1}{t-t_1} - \frac{1}{t-t_2} - \ldots - \frac{1}{t-t_\mu} + P_1(t)\right)\right]$$

$$-\sum_{i=1}^{\mu}\left(\frac{a_{-k}}{t_i^k} + \frac{a_{-k+1}}{t_i^{k-1}} + \ldots\right)$$

$$= \mathbf{E}\left[\left(\frac{a_{-k}}{t^k} + \frac{a_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 + \ldots\right)P_1(t)\right] - \mu P_1(0),$$

car on a, pour $h < 0$,

$$\mathbf{E}\frac{a_h t^h}{t-t_i} = -a_h t_i^h.$$

Lorsque φ_1 tend vers φ, cette quantité (33) a pour limite

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{a_{-k}}{t^k} + \frac{a_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots\right)P(t)\right] - \mu P(0) = \mathbf{E}\left(\frac{a_{-k}}{t^k} + \ldots\right)\frac{d\log\varphi}{dt}.$$

On arriverait d'ailleurs au même résultat en intégrant la quantité $\frac{U}{V}\frac{d\log\varphi_1}{dt}$ le long d'un contour renfermant les points $0, t_1, t_2, \ldots, t_\mu$.

Ainsi *la formule* (32) *fait connaître la somme des valeurs de* $\frac{U}{V}$ *aux points communs aux courbes* $f = 0$, $\varphi = 0$ *où cette quantité a une valeur finie.*

31. Soit maintenant dI une différentielle abélienne prise sur la courbe $f = 0$. Coupons cette courbe par deux autres de même degré n

$$F = 0, \qquad \Phi = 0$$

et cherchons à calculer la somme des intégrales $\int dI$ entre les points d'intersection de F et ceux de Φ. Nous poserons à cet effet

$$F = \psi - u_1\chi, \qquad \Phi = \psi - u_2\chi,$$

de sorte que $\chi = 0$ sera une courbe quelconque du faisceau (F, Φ), et nous considérerons la courbe variable

$$\psi - u\chi = 0$$

qui coupera f en un certain nombre de points fixes ou mobiles. L'élément d'intégrale $\int \Sigma dI$ pris entre les points $(f = 0,\ \psi - u\chi = 0)$ et $(f = 0,\ \psi - (u + du)\chi)$ sera

$$(34) \qquad Udu = du \sum \frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)},$$

la sommation étant relative aux points d'intersection *mobiles* des courbes $f = 0$, $\psi - u\chi = 0$. Or la somme des valeurs de $\frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)}$ en tous les points $(f = 0,\ \psi - u\chi = 0)$, sauf ceux où cette quantité est infinie (lesquels appartiennent, bien entendu aux points d'intersection fixes) est égale à nC, plus la somme des résidus, par rapport aux cycles de f où $\frac{dI}{d\frac{\psi}{\chi}}$ est infini, de la quantité

$$-\frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)} \frac{d \log(\psi - u\chi)}{dt} = \frac{-I'\chi^2}{\psi'\chi - \psi\chi'} \frac{\psi' - u\chi'}{\psi - u\chi},$$

en désignant par I', ψ', etc., les dérivées $\frac{dI}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, etc.

$$(35) \qquad \sum \frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)} = \mathrm{SE}\left(\frac{-I'\chi^2}{\psi'\chi - \psi\chi'} \frac{\psi' - u\chi'}{\psi - u\chi}\right) + nC.$$

De la fraction $\frac{\psi' - u\chi'}{\psi - u\chi}$ nous retrancherons le terme $\frac{\chi'}{\chi}$. On a

$$(36)\qquad \mathrm{SE}\frac{-I'\chi^2}{\psi'\chi - \psi\chi'}\frac{\chi'}{\chi}\Big) + nC = \sum{}' \frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)}\,.$$

la somme Σ' étant relative aux points $(f = 0,\ \chi = 0)$ où $\frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)}$ est fini. Parmi ceux-ci figurent les points communs à la courbe f et au faisceau (ψ, χ): ces points disparaîtront donc dans la soustraction des formules (35), (36). Mais la quantité $\frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)}$ est nulle pour $\chi = 0$, $\psi \neq 0$, à moins que χdI ne soit infini, hypothèse que nous pouvons écarter, puisque $\chi = 0$ est une courbe arbitraire du faisceau (F, Φ). Il viendra en conséquence pour le coefficient de du dans l'élément d'intégrale (34)

$$(37)\qquad U = \mathrm{SE}\left(-\frac{1}{\frac{\psi}{\chi} - u}\frac{dI}{dt}\right)$$

(à cause de l'identité $\frac{\psi' - u\chi'}{\psi - u\chi} = \frac{\chi'}{\chi} + \frac{\psi'\chi - \psi\chi'}{\chi(\psi - u\chi)}$).

Cette formule (37) n'est autre que la formule fondamentale (3) du mémoire de M. Humbert.[1] A cause de la disparition du facteur $\psi'\chi - \psi\chi'$, la somme du second membre s'étend aux seuls cycles de f où $\frac{dI}{dt}$ devient infini.

32. Nous venons d'obtenir le coefficient de du; mais rien n'est plus aisé que d'obtenir l'intégrale elle-même. Il est clair en effet que dans la formule (37) nous avons le droit d'intégrer par rapport à u sous le signe E, ce qui nous donne (en intégrant de u_1 à u_2)

$$(38)\qquad \Sigma I = -\mathrm{SE}\left(\frac{dI}{dt}\log\frac{F}{\Phi}\right).$$

[1] Journal de Mathématiques, 4e série, tome 3, page 334.

33. Il est à remarquer que nous n'aurions point pu poser $\varphi = F$, $\chi = \Phi$ et considérer la courbe $F - u\Phi = 0$, u variant de 0 à ∞; car l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{\varphi}{\chi} - u} du$ est infinie avec u. On se convainc aisément que les termes infinis disparaissent dans la sommation. C'est ce qui explique comment cette difficulté a pu être écartée par l'artifice simple dont nous nous sommes servis.

34. Nous nous sommes jusqu'ici occupés de courbes planes. Mais tout ce que nous venons de dire s'applique mot pour mot aux courbes gauches.

On considérera alors l'intersection des trois surfaces $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\varphi = 0$ et l'on obtiendra pour la somme des valeurs de $\frac{U}{V}$ en ces points une formule toute semblable à la formule (32), et où figureront les cycles de la courbe $(f_1 = 0,\ f_2 = 0)$ où $\frac{U}{V}$ devient infinie. (En particulier on déduira de cette formule le théorème de JACOBI généralisé au cas de trois équations.)

Cette formule, établie pour les courbes qui sont intersection complète, s'étend immédiatement aux courbes gauches algébriques quelconques puisque toute pareille courbe devient une intersection complète lorsqu'on lui adjoint une ou plusieurs droites, auxquelles la proposition est applicable.

On pourra en particulier généraliser le théorème de JACOBI à l'intersection d'une courbe gauche algébrique quelconque et d'une surface.

La formule (32) étant une fois démontrée, les déductions qui suivent subsistent sans modification et il est clair que l'on pourrait raisonner de même pour les courbes algébriques définies dans une espace à un nombre quelconque de dimensions.

35. Nous n'avons pas à développer les nombreuses applications des formules (32), (37) et (38), lesquelles ont été traités dans les mémoires précédemment cités de M. HUMBERT. Nous dirons simplement un mot d'un cas sur lequel ce géomètre n'a pas insisté spécialement, celui des intégrales prises le long d'une courbe fermée. Dans ce cas, la quantité

$\log\frac{F}{\Phi}$ de la formule (38) devra évidemment être remplacée par un multiple de $2i\pi$.

Soit, par exemple, une courbe Γ de degré $2m$ composée de m parties fermées $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ à l'intérieur desquelles peut passer une même droite. Par cette droite on pourra faire passer un plan mobile qui coupera chaque branche fermée en deux points. Lorsque notre plan aura accompli une demi-revolution, les points mobiles auront à eux deux parcouru la branche entière sur laquelle ils se trouvent, dans un sens déterminé.

Soit maintenant dI une différentielle abélienne qui ne devient infinie en aucun point réel de notre courbe: les formules précédentes nous permettront de calculer la somme S des intégrales $\int dI$ prises le long des m branches.

Prenons pour axe des x la droite D. Pour éviter un inconvénient analogue à celui que nous avons signalé au n° 33, nous prendrons notre plan mobile sous la forme

$$y\sin\theta - z\cos\theta = 0,$$

où θ variera dans un intervalle égal à π. On aura alors pour élément d'intégrale

$$(39)\qquad d\theta\sum\frac{dI(y^2+z^2)}{ydz-zdy} = d\theta\left[\mathrm{SE}\frac{I'(y^2+z^2)}{yz'-zy'}\frac{y'\sin\theta - z'\cos\theta}{y\sin\theta - z\cos\theta} + C\right].$$

Nous avons donc à intégrer la différentielle $d\theta\frac{y'\sin\theta - z'\cos\theta}{y\sin\theta - z\cos\theta}$ dans un intervalle égal à π ou en posant $\operatorname{tg}\theta = u$, à intégrer

$$(40)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y'u - z'}{yu - z}\frac{du}{1+u^2}.$$

Cette intégrale, au facteur $2i\pi$ près, s'obtient en prenant le résidu de la quantité sous le signe $\int$ par rapport au point $u = i$ et y ajoutant le

résidu relatif au point $u = \frac{z}{y}$ si le coefficient de i dans cette dernière quantité est positif. Le résidu relatif à $u = i$ fournit à l'intégrale de la quantité (39) le terme

$$\pi \mathrm{S} \mathrm{E} \frac{dI(y^2 + z^2)}{ydz - zdy} \frac{d}{dt} \log(y + iz),$$

lequel, ajouté à la quantité $C\pi$ provenant de l'intégration du terme constant C, donne une somme égale à

$$\pi \sum_{\Gamma, y+iz=0} \frac{dI(y^2 + z^2)}{ydz - zdy} = 0.$$

Le résidu de l'intégrale (40), relatif au point $u = \frac{z}{y}$, étant $\frac{y'z - z'y}{y^2 + z^2}$, on voit qu'il vient simplement

$$\mathrm{S} = 2i\pi \mathrm{S}' \mathrm{E} \frac{dI}{dt},$$

la somme S′ étant étendue aux infinis de l'intégrale tels que le coefficient de i dans le rapport $\frac{z}{y}$ en ces points soit positif.

L'intégrale I devient infinie en 2μ points $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_\mu, Q_\mu$, imaginaires conjugués deux à deux. On voit que l'on doit faire entrer dans la formule (41) le résidu relatif à un des points de chaque couple, les points $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ par exemple.

36. La droite D n'est assujettie qu'à la condition de traverser chacune des parties fermées $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ de Γ. Si donc R est une région continue de l'espace, de chaque point de laquelle on voit ces courbes fermées sous de cônes ayant à leur intérieur une partie commune (région limitée par des portions de développables circonscrites à ces courbes), la droite D pourra prendre une position quelconque à l'intérieur de cette région.

Il est clair à priori que le choix des points $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ ne doit pas être influencé par une semblable variation de position de D. C'est ce que l'on constate de la manière suivante.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, L, M, N$ les coordonnées plückériennes de D, rapportées à des axes quelconques. Comme dans le numéro précédent on suppose qu'il a été choisi un sens sur D, ces coordonnées doivent être regardées comme définies à un même facteur *positif* près. Les anciennes coordonnées y, z seront remplacées par des polynômes du premier degré $ax + by + cz + dt$, $a'x + b'y + c'z + d't$ tels que les déterminants $bc' - cb'$, $ac' - ca'$, ... soient proportionnelles, avec un facteur de proportionnalité *positif*, aux quantités α, β, etc.

Considérons d'autre part un couple de points P_1, Q_1 imaginaires conjuguées, situés à distance finie ou à l'infini, dont les coordonnées homogènes sont $x \pm x'i$, $y \pm y'i$, $z \pm z'i$, $t \pm t'i$. Par ces deux points passe une droite réelle D_1, et au choix de l'un des points P_1, Q_1 par opposition à l'autre correspondra le choix d'un sens sur cette droite: le sens positif par rapport auquel le segment qui va du point choisi à l'autre aura la partie imaginaire positive. On obtiendra les coordonnées de la droite D_1, prise dans le sens en question (si l'on a choisi le point

$$P_1(x + x'i, y + y'i, z + z'i, t + t'i)$$

par opposition au point $Q_1(x - x'i, y - y'i, z - z'i, t - t'i)$,) en divisant par i les déterminants $(x + x'i)(t - t'i) - (x - x'i)(t + t'i)$, etc.[1]

Le coefficient de i dans le rapport

$$\frac{a'(x + x'i) + b'(y + y'i) + c'(z + z'i) + d'(t + t'i)}{a(x + x'i) + b(y + y'i) + c(z + z'i) + d(t + t'i)}$$

est égal, à un dénominateur positif près, à l'expression

$$(42) \qquad \alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1 + \alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N,$$

expression bien connue dont le signe dépend du sens de rotation d'une des semi-droites D, D_1 par rapport à l'autre. C'est donc ce sens de rotation qui décidera du choix du point P_1.

---

[1] En effet cette conclusion est vraie pour $t \pm t'i = 1$, et d'autre part, les signes des déterminants ne sont pas altérés si on multiplie les quatre coordonnées des deux points P_1, Q_1 par deux quantités imaginaires conjuguées l'une de l'autre.

D'ailleurs ce sens de rotation ne varie pas par le déplacement de D à l'intérieur de la région R, car la quantité (42) ne devient nulle que si les droites D, D_1 sont dans un même plan: ce qui ne saurait arriver, puisque ce plan couperait la courbe Γ, de degré $2m$, en $2m$ points réels et 2 imaginaires.

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE PESANT SUSPENDU PAR L'UN DE SES POINTS

PAR

R. LIOUVILLE

À PARIS.

Le mouvement d'un corps solide pesant, dont un point reste fixe, peut être regardé comme défini par six équations différentielles, de forme simple et symétrique; on en a depuis longtemps obtenu trois intégrales et le multiplicateur, ce qui réduit tout le problème à la recherche d'une intégrale unique.

Cependant on ne connut, jusqu'en ces dernières années, qu'un seul cas de réduction aux quadratures, celui qui se présente quand le centre de gravité du solide se trouve sur l'un des axes de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension. Indiqué d'abord par LAGRANGE, puis étudié par JACOBI, il a été traité par HALPHEN d'une façon complète. (*Fonctions elliptiques,* tome II, chapitre 2 et 3.)

C'est seulement en 1888 qu'un nouveau cas d'intégration fut trouvé par Mme de KOWALEWSKI, dont le mémoire sur le sujet reçut l'un des prix décernés par l'Académie des Sciences de Paris. Quelques années plus tard, l'éminent géomètre avait obtenu des résultats plus importants encore, mais la mort l'empêcha de les publier et c'est par une note, insérée en 1892 dans un ouvrage de M. POINCARÉ que le monde savant fut averti de la découverte faite par SOPHIE KOWALEWSKI.

»Je crois savoir», disait M. POINCARÉ, »que Mme de KOWALEWSKI a découvert de nouveaux cas d'intégrabilité. Les notes qu'on a retrouvées après sa mort sont malheureusement insuffisantes pour permettre de reconstituer ses démonstrations et ses calculs.» En même temps et, comme

conséquence accessoire d'une de ses théories. M. POINCARÉ démontrait l'impossibilité d'une nouvelle intégrale algébrique, si l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe n'est pas de révolution.

Dans le Mémoire qui va suivre, je me suis proposé de déterminer tous les cas dans lesquels le problème de la rotation admet une quatrième intégrale algébrique. Mes recherches, entreprises en vue d'un concours pour le prix BORDIN de 1894, étaient à peu près terminées lorsqu'une indication fut donnée par MM. APPELL et POINCARÉ dans »l'Intermédiaire des mathématiciens» (mars 1894). Il en résultait que la méthode employée par SOPHIE KOWALEWSKI dans l'étude de cette même question était celle qui a été obtenue par M. BRUNS (Acta mathematica, tome 11, 1887) et dont ce savant à déduit une proposition importante concernant le problème des trois corps.

Le temps m'eût fait défaut pour entrer dans cette voie et celle que j'ai suivie en est tout à fait distincte. Je crois cependant qu'un essai fait en vue d'utiliser la méthode de M. BRUNS présenterait un véritable intérêt, car si l'on voit sans peine qu'elle se prête à la recherche de conditions nécessaires et par suite à la démonstration de théorèmes négatifs, il semble au contraire plus difficile d'en conclure des conditions suffisantes, à moins de posséder l'intégrale elle-même.

L'étude des intégrales algébriques des équations de la dynamique peut être considérée à deux points de vue différents: ou bien, le problème n'est pas déterminé et l'on se propose de le choisir afin qu'il admette une intégrale algébrique, de degré donné; ou bien, le problème est l'un de ceux qui se posent naturellement et l'on veut savoir s'il existe une intégrale algébrique, quel qu'en soit le degré. Dans ces deux catégories de questions, les difficultés ne sont nullement les mêmes; c'est à la seconde que se rapporte l'objet de ce travail.

Après avoir remarqué que les équations différentielles du problème jouissent d'une homogénéité particulière, j'en déduis sans peine une première conséquence, c'est que »s'il existe une quatrième intégrale rationnelle, on peut toujours la supposer entière» (§ 1). Le polynôme qui la représente doit être ordonné d'une certaine manière, indiquée par la forme même des équations à résoudre; je donne alors le mode de construction de ses premiers termes et je montre que tout consiste dans l'intégration de certaines équations différentielles linéaires. Avant d'en

continuer l'examen, je suis conduit à signaler deux systèmes invariants, symétriques l'un de l'autre, chacun d'eux composé de trois équations; je calcule

1° les solutions qui s'en déduisent et qui dépendent de trois arbitraires,

2° les solutions infiniment voisines des précédentes, données aussi par des formules assez concises.

Il convient d'observer d'ailleurs que cet ensemble de résultats n'implique aucune condition spéciale à remplir, soit par l'ellipsoïde d'inertie du solide relatif au point de suspension, soit par la position du centre de gravité de ce solide dans le volume qu'il occupe.

Les propriétés des solutions simples ainsi définies sont l'un des éléments dont je me sers pour établir à la fois les conditions d'existence d'une quatrième intégrale algébrique et la possibilité d'en abaisser le degré au-dessous d'un nombre assignable. Mais je dois d'abord donner quelques explications nouvelles sur les termes des divers ordres qui appartiennent à cette intégrale et sur leur construction successive.

Il est aisé de constater que, non seulement le premier ordre, mais chacun des ordres est composé de termes qui s'obtiennent en intégrant des systèmes d'équations différentielles linéaires, à seconds membres. Ces mêmes systèmes, rendus homogènes, sont tous intégrables sans nulle difficulté. Le nombre des inconnues à déterminer croît avec l'ordre auquel ils correspondent, cependant la relation qu'ils conservent avec le premier d'entre eux est des plus simples et suffit à justifier les formules définitives. Celles-ci donnent en général les termes d'ordre n dans l'intégrale, quand ceux d'ordre $n-1$ sont déjà trouvés; toutefois, des exceptions aux règles ordinaires peuvent se présenter, si deux variables, qui figurent comme inconnues dans les équations différentielles du problème et comme paramètres dans les systèmes linéaires précédents, sont dans des rapports faisant partie d'une série de nombres commensurables. Ces cas exceptionnels résultent, soit de ce que l'un des systèmes linéaires admet une équation caractéristique dont les racines ne sont pas distinctes, soit de ce que les quadratures, exécutées sur les seconds membres des mêmes systèmes, introduiraient des logarithmes. Or il peut arriver qu'aucune singularité n'apparaisse, même si l'une ou l'autre de ces circonstances se rencontre; l'homogénéité dont on a déjà fait usage, jointe à une symétrie

bien visible, montrent qu'alors l'intégrale existe. La question tout entière s'est donc réduite à ceci:

En profitant des arbitraires dont on dispose, est-il possible de supprimer les singularités dans tous les cas exceptionnels?

Les arbitraires dont il s'agit sont des polynômes entiers et homogènes de deux variables; l'un constitue le terme d'ordre zéro dans l'intégrale cherchée, les autres appartiennent aux termes d'ordre pair et résultent des intégrations successives. Or on démontre que, s'ils ne permettaient d'éviter les singularités dans la construction de l'intégrale, les formules définissant les solutions simples ne devraient aussi donner lieu qu'à trois combinaisons algébriques. Les conditions à satisfaire pour en établir quatre sont donc celles d'où dépend l'existence de l'intégrale elle-même. L'une d'elles est que le centre de gravité du solide soit situé dans l'équateur de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension. (D'après un théorème de M. Poincaré, il a fallu d'abord supposer que cette surface est de révolution.)

La dernière condition, c'est qu'en désignant par $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{C}$ les carrés des axes de l'ellipsoïde, le premier axe situé dans l'équateur, le second perpendiculaire à ce plan, le rapport $\frac{2C}{A}$ soit un nombre entier, qui peut d'ailleurs être quelconque.

Ainsi sont résolues les questions relatives à la possibilité du problème; celles qui touchent au calcul effectif de l'intégrale exigent de nouveaux efforts. J'ai dit en effet qu'au cours des opérations certains polynômes entiers et homogènes s'introduisent comme arbitraires. Leur définition est une conséquence immédiate de la théorie, mais les moyens directs de les déterminer doivent être regardés comme impraticables. Le premier de ces polynômes et le plus important est le terme d'ordre zéro dans l'intégrale cherchée; c'est surtout afin de l'obtenir qu'ont été rassemblées les matières du § 7.

Sans rien supposer au sujet du rapport $\frac{C}{A}$, j'indique d'abord certaines séries représentant formellement les inconnues du problème et douées de convergence sauf en des circonstances spéciales. Leurs termes sont déduits les uns des autres d'une façon simple et, tandis que pour construire une intégrale, on devait résoudre des systèmes linéaires, à seconds membres,

formés d'équations de plus en plus nombreuses, les systèmes linéaires qui s'offrent ici ne se composent jamais que de trois équations et leurs seconds membres seuls diffèrent; l'homogénéité procure encore des données générales sur les formules définitives. Ces dernières établissent la possibilité de représenter la quatrième intégrale algébrique, dans tous les cas où elle existe, par le produit de deux polynômes entiers et homogènes, dont l'ensemble est symétrique. Rien ne donne à penser que l'intégrale ait sous cette forme son moindre degré; mais si celle-ci est choisie, le degré, toujours pair à cause de l'homogénéité, doit devenir un multiple de quatre et le terme d'ordre zéro dans l'intégrale est un carré parfait; deux de ses diviseurs sont immédiatement connus; pour les autres, certaines propriétés de l'intégrale et des séries précédentes donnent une expression simple qui les comprend. Il y figure deux nombres entiers, dont la détermination précise est la principale difficulté qui reste à surmonter pour obtenir l'intégrale elle-même.

Le dernier paragraphe renferme quelques indications sur ce sujet, mais concerne surtout les intégrales uniformes; j'espère pouvoir revenir à bref délai sur cette question.

J'ajouterai en terminant qu'une méthode, analogue à celle que j'ai employée dans ce travail, m'a permis d'étudier les cas d'intégration algébrique dans un problème fort différent; il s'agit du mouvement d'un solide invariable mobile, *sans forces accélératrices,* dans un liquide indéfini. Les équations différentielles qu'on rencontre alors n'ont que des analogies assez vagues avec celles de la rotation des solides; je n'ai eu cependant, pour les traiter, que peu de modifications à faire à l'analyse qui va suivre.

§ 1. *L'intégrale cherchée, s'il y en a une algébrique, peut être mise sous forme entière.*

Le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut se déterminer, on le sait, à l'aide des équations suivantes, quand l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point est de révolution,

$$A\frac{dp}{dt} = A_1 qr - \mu x_2 \sin\varepsilon, \qquad A\frac{dq}{dt} = -A_1 pr + \mu(x_1 \sin\varepsilon - x_3 \cos\varepsilon),$$

$$(1) \qquad C\frac{dr}{dt} = \mu x_2 \cos\varepsilon, \qquad A_1 = A - C,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = rx_2 - qx_3, \qquad \frac{dx_2}{dt} = px_3 - rx_1, \qquad \frac{dx_3}{dt} = qx_1 - px_2;$$

p, q, r sont les composantes de la rotation instantanée suivant les axes de l'ellipsoïde, $\frac{1}{\sqrt{C}}$ la longueur de l'un d'eux, celui qui est perpendiculaire à l'équateur, $\frac{1}{\sqrt{A}}$ est celle de l'autre, contenu dans ce plan; μ, ε sont deux paramètres, dont la valeur définit la position du centre de gravité du corps par rapport au point de suspension. Quand le dernier, ε, s'évanouit, le centre de gravité est situé dans l'équateur de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension.

Si le système (1) admet une intégrale algébrique, outre celles qui existent dans tous les cas, il est aisé de comprendre qu'il est permis de la supposer rationnelle à l'égard de x_1, x_2, x_3, p, q, r et μ. J'ajoute qu'elle doit exister, quel que soit μ, car en remplaçant x_1, x_2, x_3 par des inconnues nouvelles

$$X_1 = \mu x_1, \qquad X_2 = \mu x_2, \qquad X_3 = \mu x_3,$$

les équations (1) se changent en celles qui correspondraient à $\mu = 1$. Ces équations jouissent d'une homogénéité particulière; quand on multiplie p, q, r, par une constante k, t par k^{-1}, x_1, x_2, x_3 par k^2, elles ne sont

pas altérées. Toute fonction φ possédant cette homogénéité satisfait à la relation

$$(2) \qquad p\frac{\partial\varphi}{\partial p} + q\frac{\partial\varphi}{\partial q} + r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 2x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + 2x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - t\frac{\partial\varphi}{\partial t} = m\varphi,$$

dans laquelle m est son degré.

Soit

$$\frac{R}{S}$$

la fraction rationnelle qui doit constituer, pour le système (1), une quatrième intégrale indépendante de t, en sorte que R et S soient des fonctions entières des inconnues, et du paramètre μ. Il est clair que l'expression

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{A\partial p}(A_1 qr - \mu x_2 \sin\varepsilon) + \frac{\partial R}{A\partial q}(-A_1 pr + \mu x_1 \sin\varepsilon - \mu x_3 \cos\varepsilon) + \ldots,$$

doit être divisible par R. Il y a donc une identité telle que celle-ci

$$(3) \qquad \frac{dR}{dt} = \lambda R,$$

où λ est un polynôme entier. Je puis toujours imaginer que R soit une fonction, douée de l'homogénéité indiquée et dont le degré soit m; $\frac{dR}{dt}$ possède alors la même homogénéité et son degré est $m+1$. Par suite, λ est homogène et de degré 1; mais c'est une fonction entière de p, q, r, x_1, x_2, x_3; il est donc nécessaire qu'elle soit de la forme

$$(4) \qquad \lambda = \lambda_0 p + \lambda_1 q + \lambda_2 r,$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ étant des constantes. Comme conséquence, λ ne peut renfermer μ, car il contiendrait alors x_1, x_2, x_3, dont ce paramètre est inséparable, ce qui serait contraire à l'équation (4).

Soit

$$(5) \qquad R = R_0 + R_1\mu + \ldots + R_n\mu^n,$$

$R_0, R_1, \ldots, R_n$ étant indépendantes de μ; $R_0, R_1, \ldots, R_n$ sont homogènes à l'égard des variables x_1, x_2, x_3, considérées séparément. La première

d'entre elles, R_0, ne dépend donc que de p, q, r; elle vérifie de plus la condition

$$\frac{dR}{dt} = \lambda R.$$

c'est à dire

$$\frac{\partial R_0}{A\partial p} A_1 qr - \frac{\partial R_0}{A\partial q} A_1 pr = R_0(\lambda_0 p + \lambda_1 q + \lambda_2 r). \tag{6}$$

Quand $p^2 + q^2$ reste constante, il faut, en vertu de l'égalité précédente, que R_0 devienne une fonction de p, satisfaisant à l'équation différentielle

$$A_1 rd \log R_0 = \frac{A}{q}(\lambda_0 p + \lambda_1 q + \lambda_2 r) dp, \tag{7}$$

ou bien

$$d\left[\frac{A_1 r}{A} \log R_0 - \lambda_1 p\right] = \frac{\lambda_0 p dp}{q} + \lambda_2 r \frac{dp}{q} = -\lambda_0 dq + \lambda_2 r \frac{dp}{q},$$

ou encore, en posant $p^2 + q^2 = \alpha^2$,

$$d\left[\frac{A_1 r}{A} \log R_0 - \lambda_1 p + \lambda_0 q\right] = \frac{\lambda_2 r dp}{\sqrt{\alpha^2 - p^2}}. \tag{8}$$

On en conclut

$$\frac{A_1 r}{A} \log R_0 - \lambda_1 p + \lambda_0 q = \lambda_2 ir \log(p + i\sqrt{\alpha^2 - p^2}) + r \log \delta, \tag{9}$$

δ étant une fonction de $p^2 + q^2$ et de r.

Or R_0 doit être exprimable algébriquement et comme λ_0, λ_1 sont des constantes, facteurs de termes où n'entre pas r,

$$\lambda_0 = \lambda_1 = 0; \tag{10}$$

de plus, $\frac{A\lambda_2 i}{A_1}$ est un nombre rationnel e. La conséquence est que

$$\lambda_2 = -\frac{A_1 ei}{A}. \tag{10}$$

Si donc il existe une fonction R vérifiant l'identité (3), il suffit d'y changer i en $-i$ pour avoir une autre fonction, S, pour laquelle la même identité soit vérifiée, à moins cependant que R soit une fonction

réelle. Dans ce dernier cas, e ne peut être que nul et R est elle-même une intégrale entière; dans le premier, le produit RS satisfait à la condition

$$\frac{d(RS)}{dt} = 0$$

et, par suite, fournit encore une intégrale entière.

§ 2. *Calcul des premiers termes appartenant à l'intégrale, lorsqu'elle existe.*

Des relations (9), (10) et (11), § 1, on déduit que R_0 s'exprime ainsi

$$R_0 = \rho(p + iq)^e, \tag{1}$$

ρ ne contenant que r et $p^2 + q^2$. Chaque terme du développement (5), § 1, satisfait évidemment à l'équation suivante,

$$\begin{aligned} A_1 qr \frac{\partial R_i}{A\partial p} - A_1 pr \frac{\partial R_i}{A\partial q} + \frac{\partial R_i}{\partial x_1}(rx_2 - qx_3) + \frac{\partial R_i}{\partial x_2}(px_3 - rx_1) + \frac{\partial R_i}{\partial x_3}(qx_1 - px_2) \\ + x_2 \cos\varepsilon \frac{\partial R_{i-1}}{C\partial r} + (x_1 \sin\varepsilon - x_3 \cos\varepsilon)\frac{\partial R_{i-1}}{A\partial q} - x_2 \sin\varepsilon \frac{\partial R_{i-1}}{A\partial p} - \lambda R_i = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

En outre,

1° R_i est une fonction homogène, de degré i par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, considérées comme formant un groupe distinct;

2° elle satisfait aussi, en vertu d'une autre homogénéité, à l'équation (2) du paragraphe précédent, c'est à dire, dans le cas actuel, à celle-ci,

$$p\frac{\partial R_i}{\partial p} + q\frac{\partial R_i}{\partial q} + r\frac{\partial R_i}{\partial r} + 2x_1\frac{\partial R_i}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial R_i}{\partial x_2} + 2x_3\frac{\partial R_i}{\partial x_3} = mR_i; \tag{3}$$

ces deux conditions jointes exigent que l'on ait

$$p\frac{\partial R_i}{\partial p} + q\frac{\partial R_i}{\partial q} + r\frac{\partial R_i}{\partial r} = (m - 2i)R_i; \tag{4}$$

en d'autres termes, R_i est aussi homogène à l'égard des variables p, q, r, constituant un second groupe séparé; le degré de cette homogénéité est

$m-2i$. En conséquence, R_n ne renferme que x_1, x_2, x_3 et le nombre entier m est égal à $2n$.

Je fais maintenant $i=1$ dans l'équation (2) et comme, d'après ce qui précède, on peut mettre R_1 sous la forme

$$x_1 R_1' + x_2 R_1'' + x_3 R_1''',$$

$R_1', \ldots$ etc. ne dépendant que de p, q, r, les coefficients de x_1, x_2, x_3 dans l'équation obtenue devront être isolément nuls. On en conclut

$$\frac{A_1}{A} r\left(q\frac{\partial R_1'}{\partial p} - p\frac{\partial R_1'}{\partial q}\right) + qR_1''' - rR_1'' + \sin\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial q} - \lambda_2 r R_1' = 0,$$

$$(5)\quad \frac{A_1}{A} r\left(q\frac{\partial R_1''}{\partial p} - p\frac{\partial R_1''}{\partial q}\right) + rR_1' - pR_1''' + \cos\varepsilon\frac{\partial R_0}{C\partial r} - \sin\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial p} - \lambda_2 r R_1'' = 0,$$

$$\frac{A_1}{A} r\left(q\frac{\partial R_1'''}{\partial p} - p\frac{\partial R_1'''}{\partial q}\right) + pR_1'' - qR_1' - \cos\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial q} - \lambda_2 r R_1''' = 0.$$

Soit $\omega = p^2+q^2$, $p+iq = y_1$ et, par suite,

$$(6)\qquad p - iq = y_2 = \frac{\omega}{y_1}.$$

Il est clair que, si l'on regarde ω et r comme des constantes, le système précédent équivaut aux équations différentielles,

$$2A_1 r\frac{\partial R_1'}{\partial y_1} + A\left[\left(1-\frac{\omega}{y_1^2}\right)R_1''' - \frac{2irR_1''}{y_1} - \frac{2\lambda_2 ir}{y_1}R_1' + \frac{2i\sin\varepsilon}{y_1}\frac{\partial R_0}{A\partial q}\right] = 0,$$

$$(5')\quad \begin{gathered} 2A_1 r\frac{\partial R_1''}{\partial y_1} + A\left[\frac{2ir}{y_1}R_1' - i\left(1+\frac{\omega}{y_1^2}\right)R_1''' \right.\\ \left. + \frac{2i\cos\varepsilon}{y_1}\frac{\partial R_0}{C\partial r} - \frac{2i\sin\varepsilon}{y_1}\frac{\partial R_0}{A\partial p} - \frac{2\lambda_2 ir}{y_1}R_1''\right] = 0,\end{gathered}$$

$$2A_1 r\frac{\partial R_1'''}{\partial y_1} + A\left[i\left(1+\frac{\omega}{y_1^2}\right)R_1'' - \left(1-\frac{\omega}{y_1^2}\right)R_1' - \frac{2i\cos\varepsilon}{y_1}\frac{\partial R_0}{A\partial q} - \frac{2\lambda_2 ir}{y_1}R_1'''\right] = 0.$$

Elles prennent une apparence plus simple en posant

$$(6')\qquad R_1' + iR_1'' = 2\rho_1' y_1^c, \qquad R_1' - iR_1'' = 2\rho_1'' y_1^c, \qquad R_1''' = \rho_1''' y_1^c;$$

à cause de l'expression trouvée pour e,

$$A\frac{\lambda_2 i}{A_1}=e,$$

elles deviennent ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{A_1 r}{A}\frac{\partial\rho_1'}{\partial y_1}-\frac{r}{y_1}\rho_1'+\frac{1}{2}\rho_1'''+\frac{1}{y_1^{e+1}}\left[\sin\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial y_2}-\cos\varepsilon\frac{\partial R_0}{2C\partial r}\right]=0,\\
(7)\qquad &\frac{A_1 r}{A}\frac{\partial\rho_1''}{\partial y_1}+\frac{r}{y_1}\rho_1''-\frac{1}{2}\frac{\omega}{y_1^2}\rho_1'''+\frac{1}{y_1^{e+1}}\left[\cos\varepsilon\frac{\partial R_0}{2C\partial r}-\sin\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial y_1}\right]=0,\\
&\frac{A_1 r}{A}\frac{\partial\rho_1'''}{\partial y_1}+\frac{\omega}{y_1^2}\rho_1'-\rho_1''+\frac{\cos\varepsilon}{y_1^{e+1}}\left[\frac{\partial R_0}{A\partial y_1}-\frac{\partial R_0}{A\partial y_2}\right]=0.
\end{aligned}$$

Je considère le système linéaire, adjoint au précédent et homogène,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1'}{\partial y_1}+\frac{Av_1'}{A_1 y_1}-\frac{A\omega}{A_1 r y_1^2}v_1'''=0,\\
(8)\qquad &\frac{\partial v_1''}{\partial y_1}-\frac{Av_1''}{A_1 y_1}+\frac{A}{A_1 r}v_1'''=0,\\
&\frac{\partial v_1'''}{\partial y_1}-\frac{Av_1'}{A_1 r}+\frac{A\omega}{A_1 r y_1^2}v_1''=0;
\end{aligned}$$

Il est satisfait, si je prends

$$\begin{aligned}
&v_1'=y_1^M,\qquad v_1''=\frac{A_1 r}{A\omega}\left[\frac{A}{A_1 r}-\frac{2A_1 r}{A\omega}(M+1)\left(M+\frac{A}{A_1}\right)\right]y_1^{M+2},\\
(9)\qquad &v_1'''=\frac{A_1 r}{A\omega}\left(M+\frac{A}{A_1}\right)y_1^{M+1},
\end{aligned}$$

avec la condition

$$(10)\qquad (M+1)\left[1-\frac{A_1^2 r^2}{A^2\omega}\left(M+\frac{A}{A_1}\right)\left(M+2-\frac{A}{A_1}\right)\right]=0,$$

c'est à dire qu'on en connait trois solutions généralement distinctes. Or chacune d'elles donne lieu à une identité telle que celle-ci,

$$\begin{aligned}
(11)\qquad &\frac{A_1 r}{A}\frac{d}{dy_1}(v_1'\rho_1'+v_1''\rho_1''+v_1'''\rho_1''')\\
&+\frac{1}{y_1^{e+1}}\left[v_1'\left(\sin\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial y_2}-\cos\varepsilon\frac{\partial R_0}{2C\partial r}\right)\right.\\
&\left.+v_1''\left(\cos\varepsilon\frac{\partial R_0}{2C\partial r}-\sin\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial y_1}\right)+v_1'''\cos\varepsilon\left(\frac{\partial R_0}{A\partial y_1}-\frac{\partial R_0}{A\partial y_2}\right)\right]=0,
\end{aligned}$$

de laquelle se déduit par une quadrature l'expression

$$(12) \qquad v_1'\rho_1' + v_1''\rho_1'' + v_1'''\rho_1''';$$

Comme d'ailleurs, d'après (1),

$$(13) \qquad R_0 = \rho y_1^e,$$

l'on voit, en donnant à M la valeur -1, que la dérivée

$$\frac{d}{dy_1}(v_1'\rho_1' + v_1''\rho_1'' + v_1'''\rho_1''')$$

contiendrait un terme en y_1^{-1} et l'expression (12) elle-même un logarithme, ce qui est inadmissible, si l'on n'avait

$$(14) \qquad e\rho \sin \varepsilon = 0.$$

En conséquence, ou bien

$$(15) \qquad \sin \varepsilon = 0,$$

ou bien $e = 0$, cette dernière hypothèse signifiant que le polynôme R serait une intégrale indécomposable.

Je calcule, à l'aide des relations (10) et (11), les trois déterminations de la somme $v_1'\rho_1' + v_1''\rho_1'' + v_1'''\rho_1'''$ et supprimant dans chacune d'elles la facteur y_1^M qu'elle contient, j'aurai pour définir les trois quantités

$$\rho_1', y_1^2\rho_1'', y_1\rho_1''',$$

trois équations linéaires, où les inconnues sont multipliées par des facteurs constants. On a donc

$$(16) \qquad \rho_1' = \alpha + \beta y_1 + \gamma y_1^2, \quad y_1^2\rho_1'' = \alpha' + \beta' y_1 + \gamma' y_1^2, \quad y_1\rho_1''' = \alpha'' + \beta'' y_1 + \gamma'' y_1^2,$$

$\alpha, \beta, \ldots, \gamma''$ désignant des constantes, c'est à dire des fonctions de ω et r, qu'il reste à construire. Elles sont données par le système (7), dont on déduit

$$(17) \qquad \begin{cases} \alpha'' - 2\alpha r = \dfrac{\cos\varepsilon}{e}\dfrac{\partial\rho}{\partial r}, \\[2mm] \dfrac{A_1 r}{A}\alpha'' - \omega\alpha + \alpha' = \dfrac{\cos\varepsilon}{A}\left(e\rho + \omega\dfrac{\partial\rho}{\partial\omega}\right), \\[2mm] 2\left(\dfrac{2A_1}{A} - 1\right)r\alpha' + \omega\alpha'' = 0; \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&2\left(\frac{A_1}{A}-1\right)r\beta+\beta''=-\frac{2\sin\varepsilon}{A}\frac{\partial\rho}{\partial\omega},\\
(18)\qquad &\omega\beta-\beta'=\quad 0,\\
&2\left(\frac{A_1}{A}-1\right)r\beta'+\omega\beta''=-\frac{2\sin\varepsilon}{A}\left(e\rho+\omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\left(\frac{2A_1}{A}-1\right)r\gamma+\gamma''=0,\\
(19)\qquad &\frac{A_1 r}{A}\gamma''+\omega\gamma-\gamma'=\frac{\cos\varepsilon}{A}\frac{\partial\rho}{\partial\omega},\\
&2r\gamma'-\omega\gamma''=-\frac{\cos\varepsilon}{C}\frac{\partial\rho}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

Avant de résoudre ces équations, j'ai à faire une remarque très simple sur le système différentiel ((1) § 1), duquel dépend tout le problème. Et d'abord, j'introduis comme inconnues y_1, y_2, à la place de p, q; puis, au lieu de x_1, x_2,

$$z_1 = x_1 + ix_2, \qquad z_2 = x_1 - ix_2,$$

enfin, je prends pour variable $\tau = it$. Cela fait, le système indiqué devient

$$
\begin{aligned}
&\frac{Ady_1}{d\tau}=-A_1ry_1+\mu(z_1\sin\varepsilon-x_3\cos\varepsilon), &&\frac{dz_1}{d\tau}=x_3y_1-rz_1,\\
(20)\quad &\frac{Ady_2}{d\tau}=\quad A_1ry_2+\mu(x_3\cos\varepsilon-z_2\sin\varepsilon), &&\frac{dz_2}{d\tau}=rz_2-x_3y_2,\\
&\frac{2Cdr}{d\tau}=\quad \mu\cos\varepsilon(z_2-z_1), &&\frac{2dx_3}{d\tau}=y_2z_1-y_1z_2.
\end{aligned}
$$

Quand on y permute y_1, y_2 et z_1, z_2, sans toucher à x_3 ni r, il suffit de changer τ en $-\tau$, pour qu'il se reproduise lui-même. L'intégrale R, ne contenant pas τ, doit donc être symétrique en y_1, y_2 et z_1, z_2, ce qui exige, puisque $y_1y_2 = \omega$,

$$(21)\qquad \alpha=\gamma', \qquad \alpha'=\gamma\omega^2, \qquad \alpha''=\gamma''\omega, \qquad \beta\omega=\beta'.$$

En tenant compte de ces identités, les relations (19) se confondent toutes avec (17) et, posant pour abréger,

$$(22)\qquad \Delta=\omega+r^2\left(1-\frac{2A_1}{A}\right),$$

je trouve, en les résolvant

$$\begin{aligned}
&\Delta.\alpha = \frac{\cos\varepsilon}{2A_1}\left(1 - \frac{2A_1}{A}\right)\left[\omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{A}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) - e\rho\right] - \frac{\cos\varepsilon.\Delta}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r},\\
(23)\qquad &\Delta.\alpha' = \frac{\omega\cos\varepsilon}{2A_1}\left[\omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{A}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) - e\rho\right],\\
&\Delta.\alpha'' = \frac{r\cos\varepsilon}{A_1}\left(1 - \frac{2A_1}{A}\right)\left[\omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{A}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) - e\rho\right].
\end{aligned}$$

Comme $\alpha, \alpha', \alpha''$ doivent être des polynômes entiers en ω et r, on voit que l'expression suivante

$$\omega\left[\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{A}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right] - e\rho$$

est divisible par Δ.

D'après les résultats établis § 1, l'on peut toujours faire en sorte que e soit égal à zéro; cette supposition étant faite, la différence

$$\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{A}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r}$$

s'évanouit avec Δ.

Quant aux coefficients β, β', β'', on ne peut les déterminer d'une façon complète par les relations (18) et il est aisé d'en apercevoir la raison.

§ 3. *Etude d'une solution particulière remarquable.*

Les équations (20), § 2, admettent deux solutions particulières simples, qui méritent d'être signalées. Je suppose qu'à l'origine du mouvement il soit satisfait aux conditions

$$(1)\qquad y_1 = z_1 = x_3 = 0,$$

manifestement invariantes. Pour les trois autres inconnues, voici les équations à vérifier

$$\begin{aligned}
&A\frac{dy_1}{d\tau} = A_1 r y_2 - \mu z_2 \sin\varepsilon,\\
(2)\qquad &2C\frac{dr}{d\tau} = \mu z_2 \cos\varepsilon,\\
&\frac{dz_2}{d\tau} = r z_2.
\end{aligned}$$

Leurs intégrales s'aperçoivent sans difficulté: celle des forces vives est la suivante,

$$(3) \qquad Cr^2 - \mu z_2 \cos\varepsilon = H,$$

où H désigne la constante arbitraire; la première équation différentielle devient ensuite

$$(4) \qquad \frac{dy_2}{dz_2} = \frac{A_1 y_2}{A z_2} - \frac{\mu\sqrt{C}\sin\varepsilon}{A\sqrt{H + \mu z_2 \cos\varepsilon}},$$

et l'on en peut conclure

$$(5) \qquad y_2 = -\mu\sqrt{C}\sin\varepsilon\, z_2^{\frac{A_1}{A}} \int \frac{dz_2}{z_2^{\frac{A_1}{A}}\sqrt{H + \mu z_2\cos\varepsilon}};$$

de plus, à cause de la 3me équation (2),

$$(6) \qquad \tau = \sqrt{\frac{C}{H}}\log\left(\frac{r\sqrt{C} - \sqrt{H}}{r\sqrt{C} + \sqrt{H}}\right) + \text{constante},$$

ce qui achève l'intégration.

Une seconde solution, symétrique de la première, s'obtient en supposant $y_2 = z_2 = x_3 = 0$.

Il importe de posséder les solutions infiniment voisines de celles qui précèdent; à cet effet, plaçons-nous dans le cas défini par les conditions (1) et soient représentées ainsi

$$y_1 + \eta_1\,,\; y_2 + \eta_2\,,\; r + \eta_3\,,\; z_1 + \xi_1\,,\; z_2 + \xi_2\,,\; x_3 + \xi_3\,,$$

les valeurs des inconnues, infiniment peu différentes de celles qui satisfaisaient à ces conditions: $\eta_1, \eta_2, \ldots, \xi_3$ sont déterminés par le système

$$(7) \qquad \begin{aligned} A\frac{d\eta_1}{d\tau} &= -A_1 r\eta_1 + \mu(\xi_1\sin\varepsilon - \xi_3\cos\varepsilon), & \frac{d\xi_1}{d\tau} &= -r\xi_1, \\ A\frac{d\eta_2}{d\tau} &= A_1(r\eta_2 + y_2\eta_3) - \mu(\xi_2\sin\varepsilon - \xi_3\cos\varepsilon), & \frac{d\xi_2}{d\tau} &= r\xi_2 + z_2\eta_3 - y_2\xi_3, \\ 2C\frac{d\eta_3}{d\tau} &= \mu(\xi_2 - \xi_1), & 2\frac{d\xi_3}{d\tau} &= y_2\xi_1 - z_2\eta_1; \end{aligned}$$

mais celui-ci admet des intégrales évidentes

$$
\begin{aligned}
&z_2\xi_1 = \alpha,\\
(8)\qquad &A(y_2\xi_1 + z_2\eta_1) + 2Cr\xi_3 = \beta,\\
&Ay_2\eta_1 + 2Cr\eta_3 - \mu(\xi_1 + \xi_2)\cos\varepsilon - 2\mu\xi_3\sin\varepsilon = \gamma;
\end{aligned}
$$

et, comme des deux premières on déduit

$$(9)\qquad \xi_3 = \frac{1}{2Cr}\left[\beta - Az_2\eta_1 - \frac{A\alpha y_2}{z_2}\right],$$

cela permet d'écrire

$$(10)\qquad \frac{d\eta_1}{dz_2} = \eta_1\left[\frac{\mu\cos\varepsilon}{2(H + \mu z_2\cos\varepsilon)} - \frac{A_1}{Az_2}\right] + \frac{\mu}{2ACr^2z_2^2}\left[2C\alpha r\sin\varepsilon - \beta\cos\varepsilon\right] + \frac{\mu\alpha\cos\varepsilon}{2Cr^2}\frac{y^2}{z_2^2},$$

ou bien encore

$$(11)\qquad \frac{d}{dz_2}\left[\frac{\eta_1 z_2^{\frac{A_1}{A}}}{\sqrt{H + \mu z_2\cos\varepsilon}}\right] = \frac{\mu z_2^{\frac{A_1}{A}-2}}{2(H + \mu z_2\cos\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{C\alpha r\sin\varepsilon - \beta\cos\varepsilon}{A} + \alpha\cos\varepsilon . y_2\right].$$

La dernière des formules (8) donne entre η_3 et ξ_2 une relation connue; la troisième équation (7) ramène donc aux quadratures le calcul des solutions cherchées.

Parmi les conséquences à tirer de ces résultats, on remarque d'abord les suivantes:

1°. Entre les inconnues

$$\eta_1\ ,\ y_2 + \eta_2\ ,\ r + \eta_3\ ,\ \xi_1\ ,\ z_2 + \xi_2\ ,\ \xi_3\ ,$$

y_2, z_2 et r étant définies par les équations (2), il doit exister des relations algébriques, au nombre de quatre. Les formules, qui déterminent $\eta_1, \eta_2, \ldots, \xi_3$ et dans lesquelles n'entre pas τ, doivent donc renfermer une seule transcendante irréductible; j'entends par là qu'il ne peut y figurer deux fonctions transcendantes, si l'une ne dépend point algébriquement de l'autre et de ξ_1 ou de z_2.

Or, à cause de (5), η_1 contient à la fois les trois intégrales

$$\int \frac{z_2^{\frac{A_1}{A}-2}dz_2}{H+\mu z_2\cos\varepsilon},\qquad \int \frac{z_2^{\frac{A_1}{A}}dz_2}{(H+\mu z_2\cos\varepsilon)^{\frac{3}{2}}},\qquad \int \frac{z_2^{-\frac{A_1}{A}}dz_2}{(H+\mu z_2\cos\varepsilon)^{\frac{1}{2}}},$$

la première et la troisième multipliées par un facteur qui s'annule avec $\sin\varepsilon$. Il est clair qu'aucune réduction n'est possible, par exemple entre les deux premières de ces transcendantes. Il est donc nécessaire que $\sin\varepsilon$ s'évanouisse. Il y a une exception évidente, relative au cas de LAGRANGE, pour lequel $\cos\varepsilon$ est égal à zéro.

En d'autres termes, hormis ce cas, le centre de gravité doit être dans l'équateur de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension.

2°. En outre, $\frac{A_1}{A}$ est un nombre rationnel; s'il en était autrement, $z_2^{\frac{A_1}{A}}$ serait une fonction transcendante et entrerait dans l'expression des inconnues, sans être algébriquement réductible aux transcendantes qui l'accompagnent.

3°. Ces hypothèses étant faites, les équations du problème deviennent

$$(12)\qquad \begin{aligned} &A\frac{dy_1}{d\tau}=-(A_1ry_1+\mu x_3), && A\frac{dy_2}{d\tau}=A_1ry_2+\mu x_3, && 2C\frac{dr}{d\tau}=\mu(z_2-z_1),\\ &\frac{dz_1}{d\tau}=x_3y_1-rz_1, && \frac{dz_2}{d\tau}=rz_2-x_3y_2, && 2\frac{dx_3}{d\tau}=y_2z_1-y_1z_2. \end{aligned}$$

et l'on voit qu'elles jouissent d'une importante propriété: quand on y change de signe y_1, y_2, z_1, z_2 et μ, sans toucher à x_3 ni r, elles se reproduisent non modifiées. Par suite, dans les formules ((16) § 2), faisant connaitre le coefficient de la première puissance de μ dans l'intégrale R, il est permis de supposer

$$\beta=\beta'=\beta''=0;$$

leurs seconds membres deviennent ainsi des fonctions paires de la variable y_1.

4°. Le système (12) étant admis, l'équation (5) doit être remplacée par la suivante,

$$(13)\qquad y_2=h_1z_2^{\frac{A_1}{A}},$$

dans laquelle h_1 est une constante quelconque et l'on en conclut

$$(14) \qquad \eta_1 = \frac{1}{2} z_2^{-\frac{A_1}{A}} (\mu z_2 + H)^{\frac{1}{2}} \left[\mu \alpha h_1 \int \frac{z_2^{\frac{2C}{A}} dz_2}{(\mu z_2 + H)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu\beta}{A} \int \frac{z_2^{-\frac{C}{A}} dz_2}{(\mu z_2 + H)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

A cause de (8), on en déduit encore

$$(15) \qquad \frac{d}{dz_2}\left(\frac{\xi_2}{rz_2}\right) = \frac{4\alpha}{rz_2^3} + \frac{\gamma z_2 + \alpha\mu}{2Cr^3 z_2^2} + \frac{h_1}{2Cr^3}\left[A\alpha h_1 z_2^{-\frac{2C}{A}} - \beta z_2^{-\frac{C}{A}-1}\right].$$

Mais les transcendantes, à l'aide desquelles s'exprime η_1 et qui résulteraient de quadratures seulement indiquées, ont tous leurs points critiques algébriques, à moins que $\frac{2C}{A}$ soit un nombre entier. D'ailleurs, si cette condition n'est pas remplie, ξ_2 renferme cependant des logarithmes, en vertu de l'équation (15); η_1 devrait donc être liée à z_2 par une relation algébrique, où ξ_2 ne peut entrer. Or ceci est visiblement inadmissible quand $\frac{2C}{A}$ est un nombre fractionnaire. Il faut donc que ce soit un nombre entier.

5°. Si $\frac{2C}{A}$ est un nombre entier, toutes les quadratures non éxécutées peuvent être représentées de cette manière

$$\int \frac{z_2^{N_1 - \frac{1}{2}} dz_2}{(\mu z_2 + H)^{\frac{3}{2}}},$$

ou de celle-ci

$$\int \frac{z_2^{-N_1} dz_2}{(\mu z_2 + H)^{\frac{3}{2}}},$$

N_1 désignant un nombre entier. La première est algébrique et peut recevoir la forme

$$-\frac{2\mu^{N_1 - \frac{1}{2}}}{\sqrt{C}} \int \frac{r'^{2N_1+1} dr'}{(C - Hr'^2)^{N_1 + \frac{1}{2}}},$$

en posant $r = \frac{1}{r'}$. La seconde, contient un logarithme et ce dernier porte sur l'expression

$$\frac{\sqrt{C} - r'\sqrt{H}}{\sqrt{C} + r'\sqrt{H}};$$

tous les autres termes sont rationnels à l'égard de r'. C'est ce même logarithme qui figure dans ξ_2: il suffit donc de l'éliminer entre les relations faisant connaitre

$$\eta_1 \,,\; z_2 + \xi_2,$$

pour obtenir une équation intégrale algébrique.

Ainsi, quand $\frac{2C}{A}$ est un nombre entier, il y a une solution des équations (12) dans laquelle y_1, z_1, x_3 sont infiniment petits, pour laquelle en outre, non plus trois, mais quatre des équations intégrales sont algébriques.

§ 4. *Calcul des divers termes qui doivent composer l'intégrale R. Propriétés des coefficients.*

S'il existe, hormis les trois intégrales qui appartiennent à tous les cas et qui sont les suivantes

$$(1)\qquad Ay_1y_2 + Cr^2 - \mu(z_1 + z_2) = H, \qquad A(y_1z_2 + y_2z_1) + 2Crx_3 = H_1,$$
$$z_1z_2 + x_3^2 = H_2.$$

une intégrale rationnelle R, nous avons vu qu'on peut toujours la supposer entière, c'est à dire supposer e (§ 1) égal à zéro. Lorsqu'elle est développée sous la forme

$$R = R_0 + \mu R_1 + \ldots + \mu^l R_l\,.$$

un terme quelconque R_h de ce développement se laisse représenter par l'expression symbolique

$$(2)\qquad R_h = (z_1\rho_h'' + z_2\rho_h' + x_3\rho_h''')^h.$$

chaque produit

$$\rho_h^{''h_1}\rho_h^{'h_2}\rho_h^{'''h_3}$$

étant remplacé par une fonction de r et de ω, qu'il reste à calculer.

Cette recherche elle-même dépend de l'équation ((2) § 2) à laquelle R_h doit être assujettie,

$$(3)\qquad \frac{A_1 r}{A}\left(y_2\frac{\partial R_h}{\partial y_2}-y_1\frac{\partial R_h}{\partial y_1}\right)+(rz_2-x_3y_2)\frac{\partial R_h}{\partial z_2}+(x_3y_1-rz_1)\frac{\partial R_h}{\partial z_1}$$
$$+\frac{1}{2}(y_2z_1-y_1z_2)\frac{\partial R_h}{\partial x_3}+x_3\left(\frac{\partial R_{h-1}}{A\partial y_2}-\frac{\partial R_{h-1}}{A\partial y_1}\right)+(z_2-z_1)\frac{\partial R_{h-1}}{2C\partial r}=0.$$

J'emploie, pour abréger, les notations suivantes

$$\frac{A_1 r}{A}\left(y_2\frac{\partial\rho_h'}{\partial y_2}-y_1\frac{\partial\rho_h'}{\partial y_1}\right)+r\rho_h'-\frac{1}{2}y_1\rho_h'''=D\rho_h',$$

$$(4)\qquad \frac{A_1 r}{A}\left(y_2\frac{\partial\rho_h''}{\partial y_2}-y_1\frac{\partial\rho_h''}{\partial y_1}\right)-r\rho_h''+\frac{1}{2}y_2\rho_h'''=D\rho_h'',$$

$$\frac{A_1 r}{A}\left(y_2\frac{\partial\rho_h'''}{\partial y_2}-y_1\frac{\partial\rho_h'''}{\partial y_1}\right)+y_1\rho_h''-y_2\rho_h'\;=D\rho_h'''.$$

Pourvu qu'on regarde les opérations D comme soumises aux règles ordinaires du calcul des différentielles, en égalant à zéro le coefficient de chaque monôme $z_1^{h_1}z_2^{h_2}x_3^{h_3}$, dans l'équation (3), j'obtiens une série d'identités, auxquelles il est aisé de donner cette forme

$$(5)\qquad hD(\rho_h^{''h_1}\rho_h^{'h_2}\rho_h^{'''h_3})+\frac{h_2}{2C}\frac{\partial}{\partial r}(\rho_{h-1}^{''h_1}\rho_{h-1}^{'h_2-1}\rho_{h-1}^{'''h_3})-\frac{h_1}{2C}\frac{\partial}{\partial r}(\rho_{h-1}^{''h_1-1}\rho_{h-1}^{'h_2}\rho_{h-1}^{'''h_3})$$
$$+\frac{h_3}{A}\frac{\partial}{\partial y_2}(\rho_{h-1}^{''h_1}\rho_{h-1}^{'h_2}\rho_{h-1}^{'''h_3-1})-\frac{h_3}{A}\frac{\partial}{\partial y_1}(\rho_{h-1}^{''h_1}\rho_{h-1}^{'h_2}\rho_{h-1}^{'''h_3-1})=0.$$

D'après cela, si l'on veut obtenir les fonctions $\rho_h^{''h_1}\rho_h^{'h_2}\rho_h^{'''h_3}$, étant données celles d'indice inférieur $h-1$, l'on reconnait qu'il faut, en traitant r et ω comme des constantes, intégrer un système d'équations différentielles linéaires, non homogènes, dans lequel la variable indépendante est y_1. Or le système homogène, adjoint à celui-ci, admet comme solutions les produits de h solutions, distinctes ou non distinctes, appartenant au système ((8) § 2). Je les représenterai par l'expression

$$v_h^{''h_1}v_h^{'h_2}v_h^{'''h_3},$$

en écrivant ainsi le système indiqué,

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_h'}{\partial y_1} + \frac{Av_h'}{A_1 y_1} - \frac{A\omega}{A_1 r y_1^2} v_h''' = 0,\\
&\frac{\partial v_h''}{\partial y_1} - \frac{Av_h''}{A_1 y_1} + \frac{A}{A_1 r} v_h''' = 0,\\
&\frac{\partial v_h'''}{\partial y_1} - \frac{A}{A_1 r} v_h' + \frac{A\omega}{A_1 r y_1^2} v_h'' = 0.
\end{aligned}
$$

Soient encore $w = \frac{\omega}{r^2}$, $f(M) = \frac{iAwr}{A_1(M+1)+C}$; M est un exposant défini par l'équation déjà trouvée, ((10) § 2)

$$
(7)\qquad (M+1)\left[1 - \frac{A_1^2}{A^2 w}\left(M + \frac{A}{A_1}\right)\left(M + 2 - \frac{A}{A_1}\right)\right] = 0.
$$

Lorsqu'on désigne par M' et M'' ses deux racines différentes de -1 il est satisfait aux identités

$$
(8)\qquad M' + M'' + 2 = 0, \qquad f(M')f(M'') - \omega = 0,
$$

faciles à vérifier.

Cela dit, on résoudra le système (6) par les formules

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
&v_h' = Lrw^{\frac{1}{2}} y_1^{-1} + L'f(M')y_1^{M'} + L''f(M'')y_1^{M''},\\
&v_h'' = \frac{L}{rw^{\frac{1}{2}}} y_1 + \frac{L'}{f(M')} y_1^{M'+2} + \frac{L''}{f(M'')} y_1^{M''+2}.\\
&v_h''' = \frac{LC}{Aw^{\frac{1}{2}}} + iL'y_1^{M'+1} + iL''y_1^{M''+1},
\end{aligned}
$$

où L, L', L'' sont des constantes quelconques. Les fonctions, dont nous avons d'abord à faire usage,

$$
v_h'^{h_1} v_h''^{h_2} v_h'''^{h_3},
$$

sont les coefficients de facteurs numériques dans le développement de cette puissance

$$
(lv_h' + l'v_h'' + l''v_h''')^h,
$$

où l, l', l'' sont regardés comme des constantes à volonté. Ce sont les inconnues d'un système linéaire, déduit de (6) comme il a été dit et dont toutes les solutions sont les termes de l'expression suivante

$$\Big[l\big(Lrw^{\frac{1}{2}}y_1^{-1} + L'f(M')y_1^{M'} + L''f(M'')y_1^{M''}\big) + l'\Big(\frac{L}{rw^{\frac{1}{2}}}y_1 + \frac{L'}{f(M')}y_1^{M'+2} + \frac{L''}{f(M'')}y_1^{M''+2}\Big)$$
$$+ l''\Big(\frac{LC}{Aw^{\frac{1}{2}}} + iL'y_1^{M'+1} + iL''y_1^{M''+1}\Big)\Big]^h,$$

c'est à dire sont données par les formules

$$(10)\qquad y_1^{h_2-h_1}v_h''^{h_1}v_h'^{h_2}v_h'''^{h_3} = \Big(\frac{L}{rw^{\frac{1}{2}}} + \frac{L'}{f(M')}y_1^{M'+1} + \frac{L''}{f(M'')}y_1^{M''+1}\Big)^{h_1}$$
$$\times \big(Lrw^{\frac{1}{2}} + L'f(M')y_1^{M'+1} + L''f(M'')y_1^{M''+1}\big)^{h_2}\Big(\frac{LC}{Aw^{\frac{1}{2}}} + iL'y_1^{M'+1} + iL''y_1^{M''+1}\Big)^{h_3}.$$

On y doit considérer comme constituant des solutions distinctes les coefficients de toutes les constantes

$$L^{g_1}L'^{g_2}L''^{g_3}.$$
$$(g_1 + g_2 + g_3 = h_1 + h_2 + h_3 = h)$$

dans le développement de l'expression précédente. Celle-ci peut encore s'écrire, d'une façon plus commode,

$$(10')\qquad y_1^{h_2-h_1+h(M'+1)}v_h''^{h_1}v_h'^{h_2}v_h'''^{h_3} = \Big(\frac{L}{rw^{\frac{1}{2}}}y_1^{M'+1} + \frac{L'}{f(M')}y_1^{2(M'+1)} + \frac{L''}{f(M'')}\Big)^{h_1}$$
$$\times \big(Lrw^{\frac{1}{2}}y_1^{M'+1} + L'f(M')y_1^{2(M'+1)} + L''f(M'')\big)^{h_2}\Big(\frac{LC}{Aw^{\frac{1}{2}}}y_1^{M'+1} + iL'y_1^{2(M'+1)} + iL''\Big)^{h_3},$$

et, si l'on pose, après avoir désigné par $h_{1.1}$, $h_{1.2}$, ... etc. des nombres entiers positifs,

$$h_1 = h_{1.1} + h_{1.2} + h_{1.3}, \qquad h_2 = h_{2.1} + h_{2.2} + h_{2.3}, \qquad h_3 = h_{3.1} + h_{3.2} + h_{3.3},$$

$$(11)\qquad B_h = \frac{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}}{\underline{|h_{1.1}}\,\underline{|h_{1.2}}\,\underline{|h_{1.3}}\,\underline{|h_{2.1}}\,\underline{|h_{2.2}}\,\underline{|h_{2.3}}\,\underline{|h_{3.1}}\,\underline{|h_{3.2}}\,\underline{|h_{3.3}}},$$

puis,

$$g_1 = h_{1.1} + h_{2.1} + h_{3.1}, \qquad g_2 = h_{1.2} + h_{2.2} + h_{3.2}, \qquad g_3 = h_{1.3} + h_{2.3} + h_{3.3},$$

elle se développe de cette manière

$$(12) \qquad y_1^{h_2 - h_1 + h(M'+1)} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3}$$

$$= \sum B_h L^{g_1} L'^{g_2} L''^{g_3} (rw^{\frac{1}{2}})^{h_{2.1} - h_{1.1}} f(M')^{h_{2.2} - h_{1.2}} f(M'')^{h_{2.3} - h_{1.3}} i^{h_{3.2} + h_{3.3}} \left(\frac{C}{Aw^{\frac{1}{2}}} \right)^{h_{3.1}} y_1^{(M'+1)(g_2 - g_3 + h)}.$$

L'une quelconque des solutions cherchées est donc déterminée par l'équation

$$(13) \qquad v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} = A(h_1, h_2, h_3, M') y_1^{(g_2 - g_3)(M'+1) + h_1 - h_2},$$

avec

$$(14) \quad A(h_1, h_2, h_3, M') = \sum B_h (rw^{\frac{1}{2}})^{h_{2.1} - h_{1.1}} f(M')^{h_{2.2} - h_{1.2}} f(M'')^{h_{2.3} - h_{1.3}} i^{h_{3.2} + h_{3.3}} \left(\frac{C}{Aw^{\frac{1}{2}}} \right)^{h_{3.1}};$$

la sommation indiquée s'étend à toutes les valeurs des indices pour lesquelles h_1, h_2, h_3 et g_1, g_2, g_3 sont des sommes connues. D'ailleurs il est aisé d'obtenir, pour représenter ces coefficients A, des notations plus simples. Soient en effet

$$(15) \qquad l'' = Lrw^{\frac{1}{2}} + L'f(M') + L''f(M''), \qquad l''' = \frac{L}{rw^{\frac{1}{2}}} + \frac{L'}{f(M')} + \frac{L''}{f(M'')},$$

$$l'''' = \frac{LC}{Aw^{\frac{1}{2}}} + iL' + iL'';$$

il est clair alors que la relation

$$(16) \qquad A(h_1, h_2, h_3, M') = \frac{1}{\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}} \frac{\partial^h}{\partial L^{g_1} \partial L'^{g_2} \partial L''^{g_3}} (l'''^{h_1} l''^{h_2} l''''^{h_3}),$$

dans laquelle les opérations indiquées ne sont pas symboliques, mais effectives, est équivalente à (14). Je dis maintenant que les fonctions inconnues, $\rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3}$, sont définies en général par des égalités de cette espèce,

$$(17) \qquad \rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3} = \sum_{(k \leqq h)} \alpha_{h_1, h_2, h_3}^{(k)} y_1^{2k - 2h_1 - h_3},$$

les quantités $\alpha^{(k)}_{h_1, h_2, h_3}$, liées aux seules variables, ω et r, étant fonctions entières, homogènes et de degré

$$2n - 2k + 2h_1 + h_3 - 2h.$$

Pour le prouver, il suffit d'établir que si des formules telles que (17) sont vraies quand l'indice h reçoit les valeurs inférieures à un nombre donné, elles le sont encore quand il atteint ce nombre lui-même. Voici comment on le peut voir: les équations linéaires (a), satisfaites par les inconnues (17), sont ce que deviennent les équations (5) après y avoir remplacé les opérations (4) par les suivantes

$$(18)\qquad \begin{aligned} D\rho'_h &= -\frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial \rho'_h}{\partial y_1} + r\rho'_h - \frac{1}{2} y_1 \rho'''_h, \\ D\rho''_h &= -\frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial \rho''_h}{\partial y_1} - r\rho''_h + \frac{1}{2}\frac{\omega}{y_1}\rho'''_h, \\ D\rho'''_h &= -\frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial \rho'''_h}{\partial y_1} + y_1\rho''_h - \frac{\omega}{y_1}\rho'_h, \end{aligned}$$

et y_2 par $\dfrac{\omega}{y_1}$; ω, r doivent de plus être traités comme des constantes. Le système adjoint au précédent et sans seconds membres est celui qui est vérifié par les fonctions (13). Or, en vertu des propriétés bien connues des systèmes adjoints, l'identité

$$(19)\qquad \sum \frac{\underline{|h}}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}} v''^{h_1}_h v'^{h_2}_h v'''^{h_3}_h\, D\left(\rho''^{h_1}_h \rho'^{h_2}_h \rho'''^{h_3}_h\right)$$

$$= -\frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\sum \frac{\underline{|h}}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}} v''^{h_1}_h v'^{h_2}_h v'''^{h_3}_h . \rho''^{h_1}_h \rho'^{h_2}_h \rho'''^{h_3}_h\right]$$

a lieu, quelle que soit la valeur attribuée à chacun des trois nombres g_1, g_2, g_3, dont la somme est h, les signes de sommation s'appliquant à toutes les valeurs des indices h_1, h_2, h_3, liés aussi par la seule condition

$$h_1 + h_2 + h_3 = h.$$

Mais, dans les deux derniers termes de l'équation (5), les dérivées partielles étaient prises en regardant y_1 et y_2 comme les variables indé-

pendantes; lorsqu'on fait jouer ce rôle à y_1 et ω, les termes indiqués s'expriment par

$$(20) \qquad \frac{h_3}{A}\left(y_1 - \frac{\omega}{y_1}\right)\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\rho_{h-1}^{''h_1}\rho_{h-1}^{'h_2}\rho_{h-1}^{'''h_3-1}\right) + \frac{h_3}{A}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\rho_{h-1}^{''h_1}\rho_{h-1}^{'h_2}\rho_{h-1}^{'''h_3-1}\right).$$

Si donc le degré en y_1 de la fonction $\rho_{h-1}^{''h_1}\rho_{h-1}^{'h_2}\rho_{h-1}^{'''h_3-1}$ était, selon l'hypothèse traduite par la formule (17),

$$2h - (2h_1 + h_3 + 1),$$

celui de l'expression (20) est d'une unité supérieur. D'après la relation (19), pour intégrer le système (a), j'ai à multiplier chacune des fonctions (20) par une autre, de cette forme

$$Ay_1^f,$$

à faire la somme de tous ces produits, à intégrer ensuite l'équation ainsi obtenue, où ω et r sont des constantes, à résoudre enfin des équations linéaires, à coefficients constants, qui font connaître les produits

$$y_1^f\rho_h^{''h_1}\rho_h^{'h_2}\rho_h^{'''h_3};$$

or je trouve par ce moyen un polynôme, entier en y_1, de degré visiblement égal à $2h - (2h_1 + h_3 + 1) + 1$. C'est celui que la proposition énoncée attribuait à l'inconnue (17). En outre, le produit de celle-ci par $y_1^{2h_1+h_3}$ est bien une fonction paire de y_1, selon l'une des remarques faites au paragraphe precédent. J'ajoute que, l'intégrale R étant symétrique en y_1, y_2; z_1, z_2, (§ 2), il en doit résulter l'égalité

$$(21) \qquad \omega^{h-k+h_1}\alpha_{h_2,h_1,h_3}^{(h-k)} = \omega^{k+h_2}\alpha_{h_1,h_2,h_3}^{(k)},$$

car $y_2 = \dfrac{\omega}{y_1}$.

§ 5. *Expression des termes qui composent l'intégrale R, dont l'existence est supposée. Mode d'achèvement des calculs qui s'y rapportent.*

Afin d'obtenir les valeurs explicites des coefficients $\alpha_{h_1,h_2,h_3}^{(k)}$, j'aurai besoin de considérer les systèmes différentiels (b'), linéaires et homogènes,

obtenus en supprimant les seconds membres dans les équations (a). Je les représente ainsi

$$(1) \qquad D\left(u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3}\right) = 0,$$

avec la condition $h_1 + h_2 + h_3 = h$. Le premier d'entre eux définit les trois fonctions u_1', u_1'', u_1''', par les relations suivantes,

$$(2) \qquad \frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial u_1'}{\partial y_1} - r u_1' + \frac{1}{2} y_1 u_1''' = 0, \qquad \frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial u_1''}{\partial y_1} + r u_1'' - \frac{1}{2}\frac{\omega}{y_1} u_1''' = 0,$$

$$\frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial u_1'''}{d y_1} + \frac{\omega}{y_1} u_1' - y_1 u_1'' = 0,$$

desquelles on conclut ceci

$$u_1' = \frac{A^2 w}{4 A_1^2 (M+1)^2}\left[\frac{2l}{r w^{\frac{1}{2}}} y_1 - \frac{l'}{f(M'')} y_1^{-M'} - \frac{l''}{f(M')} y_1^{-M''}\right],$$

$$(3) \qquad u_1'' = \frac{A^2 w}{4 A_1^2 (M+1)^2}\left[2 l r w^{\frac{1}{2}} y_1^{-1} - l' f(M'') y_1^{-M'-2} - l'' f(M') y_1^{-M''-2}\right],$$

$$u_1''' = \frac{A^2 w}{2 A_1^2 (M+1)^2}\left[\frac{2lC}{A w^{\frac{1}{2}}} - i l' y_1^{-M'-1} - i l'' y_1^{-M''-1}\right];$$

l, l', l'' sont des constantes arbitraires.

En raisonnant comme on l'a fait, au paragraphe précédent, pour le système (b), adjoint à (1), on verrait encore que toutes les solutions de ce dernier s'expriment de cette manière

$$(4) \qquad u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3} = \lambda(h_1, h_2, h_3, M') y_1^{(g_3 - g_2)(M'+1) + h_2 - h_1},$$

les coefficients λ étant donnés par la formule

$$(5) \qquad \lambda(h_1, h_2, h_3, M') = \frac{2^{h_3}}{g_1!\, g_2!\, g_3!}\left[\frac{A^2 w}{4 A_1^2 (M'+1)^2}\right]^h$$

$$\times \left| \frac{\partial^h}{\partial l^{g_1}\, \partial l'^{g_2}\, \partial l''^{g_3}} \left| \left(2 l r w^{\frac{1}{2}} - l' f(M'') - l'' f(M')\right)^{h_1} \left(\frac{2l}{r w^{\frac{1}{2}}} - \frac{l'}{f(M'')} - \frac{l''}{f(M')}\right)^{h_2} \left(\frac{2lC}{A w^{\frac{1}{2}}} - i l' - i l''\right)^{h_3} \right| \right|.$$

Dans les seconds membres de ces relations (4) et (5), toutes les opérations indiquées sont effectives et non symboliques. A chaque groupe de

valeurs attribuées aux trois indices g_1, g_2, g_3, dont la somme est h, il correspond une solution particulière du système (1). La même chose avait lieu, au paragraphe précédent, lorsqu'on employait les formules (13) et (16) pour déterminer les solutions du système (b), adjoint à celui-ci. Je dirai que les solutions de ces systèmes sont concordantes, lorsqu'elles répondent aux mêmes valeurs des indices g_1, g_2, g_3. Alors il est aisé de constater que les formules (3) et ((9) § 4) ont été construites de telle façon que la somme

$$u_1' v_1' + u_1'' v_1'' + u_1''' v_1''',$$

si les solutions considérées sont concordantes, soit égale à cette arbitraire,

$$Ll + L'l' + L''l'',$$

différente de zéro; la même somme est nulle au contraire quand les solutions ne sont pas concordantes.

On en déduit immédiatement que les solutions des systèmes généraux (b) et (b') vérifient les identités,

$$(6) \qquad \sum \frac{|\underline{h}}{|\underline{h_1}\,|\underline{h_2}\,\underline{h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} . u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3} = \frac{|\underline{h}}{|\underline{g_1}\,|\underline{g_2}\,|\underline{g_2}},$$

lorsqu'elles sont choisies comme nous l'avons dit et de plus concordantes; elles vérifient au contraire celles-ci

$$(7) \qquad \sum \frac{|\underline{h}}{|\underline{h_1}\,|\underline{h_2}\,|\underline{h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} . u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3} = 0,$$

lorsque la concordance n'a pas lieu.

J'imagine que les fonctions

$$\frac{1}{|\underline{h_1}\,|\underline{h_2}\,|\underline{h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3}$$

soient réunies en un tableau, celles dont l'ensemble constitue l'une des solutions du système (b) se trouvant sur une seule ligne, toutes les expressions possibles d'une même inconnue formant une seule colonne. A ce tableau correspond un déterminant V. J'en construis un autre, tout semblable, avec les fonctions adjointes,

$$|\underline{g_1}\,|\underline{g_2}\,|\underline{g_3}\, u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''$$

et l'on voit qu'à cause des relations (6) et (7) leur produit est égal à l'unité. En outre, d'après leur composition, si l'un des éléments du premier est v, l'élément de même situation dans le second est

$$\frac{\partial V}{V\partial v}.$$

Ayant donc à résoudre un système linéaire dans lequel chaque équation a pour coefficients les éléments d'une même ligne du déterminant V, je devrai les multiplier par les éléments contenus dans une même colonne du déterminant

$$\left\| \underline{|g_1}\, \underline{|g_2}\, \underline{|g_3}\, u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3} \right\|, \tag{8}$$

inverse de V et faire la somme des produits ainsi formés.

Ces remarques faites, je reviens au système (a), définissant les inconnues

$$\rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3}$$

qu'il s'agit d'obtenir. En admettant pour plus de brièveté ces notations,

$$\begin{aligned} \theta(h_1, h_2, h_3, i') &= \frac{h_3}{A}\frac{\partial \alpha^{(i')}_{h_1.h_2.h_3-1}}{\partial \omega} - \frac{h_1}{2C}\frac{\partial \alpha^{(i')}_{h_1-1.h_2.h_3}}{\partial r}, \\ \vartheta(h_1, h_2, h_3, i') &= \frac{h_2}{2C}\,\omega\,\frac{\partial \alpha^{(i')}_{h_1.h_2-1.h_3}}{\partial r} - \frac{h_3}{A}\,\omega\,\frac{\partial \alpha^{(i')}_{h_1.h_2.h_3-1}}{\partial \omega} \\ &\quad + \frac{h_3}{A}(2h_1 + h_3 - 2i' - 1)\alpha^{(i')}_{h_1.h_2.h_3-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

et celle-ci

$$T(h_1, h_2, h_3, i') = \theta(h_1, h_2, h_3, i' - 1) + \vartheta(h_1, h_2, h_3, i'), \tag{10}$$

le système à intégrer, (a), s'écrit de cette manière, (§ 4),

$$hD(\rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3}) + \sum_{(i')} T(h_1, h_2, h_3, i') y_1^{2i'-2h_1-h_3} = 0 \tag{a}$$

et l'on en déduit

$$\begin{aligned} &\frac{hA_1 r}{A} y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\sum \frac{\underline{|h}}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} . \rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3} \right] \\ &\quad - \sum \frac{\underline{|h}}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}} T(h_1, h_2, h_3, i') y_1^{2i'-h+(g_2-g_3)(M'+1)} = 0; \end{aligned} \tag{11}$$

les sommes sont étendues à toutes les valeurs de h_1, h_2, h_3, satisfaisant à l'égalité $h_1 + h_2 + h_3 = h$ et à toutes les valeurs de i' inférieures à h.

L'intégration donne en général

$$(12) \qquad \sum \frac{\underline{|h}}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} . \rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3}$$

$$-\sum \frac{\underline{|h-1}}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}} \cdot \frac{T(h_1, h_2, h_3, i')}{2i' - h + (g_2 - g_3)(M' + 1)} y_1^{2i' - h + (g_2 - g_3)(M'+1)} = \text{constante } F.$$

elle introduit une constante arbitraire, c'est à dire une fonction de r et de ω, qui, d'après la nature du problème, doit être homogène et algébrique. Comme d'ailleurs

$$y_1^{(g_2 - g_3)(M'+1)}$$

est en facteur dans tous les termes de l'équation précédente, ((13) § 4), je puis diviser toute l'équation par ce facteur; elle ne renferme plus ensuite dans son premier membre que des puissances de y_1, entières et de même parité; la valeur de l'exposant M', liée à r et ω, pouvant être quelconque, il est clair que le second membre de l'équation (12) doit s'évanouir, à moins que $g_2 - g_3$ soit égal à zéro et h un nombre pair.

Pour résoudre les équations (12) et en conclure les coefficients cherchés, $\alpha_{k_1.k_2.k_3}^{(i')}$, posons

$$(13) \qquad 2lrw^{\frac{1}{2}} - l'f(M'') - l''f(M') = \gamma'', \qquad \frac{2l}{rw^{\frac{1}{2}}} - \frac{l'}{f(M'')} - \frac{l''}{f(M')} = \gamma',$$

$$\frac{2lC}{Aw^{\frac{1}{2}}} - il' - il'' = \gamma''',$$

en sorte que la formule (5) devienne

$$(14) \qquad \lambda(k_1, k_2, k_3, M') = \frac{2^{h_3}}{\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}} \left[\frac{A^2 w}{4A_1^2(M'+1)^2}\right]^h \frac{\partial^h}{\partial l^{g_1} \partial l'^{g_2} \partial l''^{g_3}} (\gamma''^{k_1} \gamma'^{k_2} \gamma'''^{k_3}),$$

avec

$$(15) \qquad k_1 + k_2 + k_3 = h.$$

Le produit

$$(16) \qquad \frac{\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} . u_h''^{k_1} u_h'^{k_2} u_h'''^{k_3}$$

s'exprime en conséquence par

$$(17)\qquad \frac{1}{\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}}\,\frac{1}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}}\,\frac{\partial^{2h}}{(\partial L\partial l)^{g_1}(\partial L'\partial l')^{g_2}(\partial L''\partial l'')^{g_3}}\left[\Gamma'''^{h_1}\Gamma''^{h_2}\Gamma'''^{h_3}.\gamma''^{k_1}\gamma'^{k_2}\gamma'''^{k_3}\right],$$

quand $v_h''^{h_1}v_h'^{h_2}v_h'''^{h_3}$ et $u_h''^{k_1}u_h'^{k_2}u_h'''^{k_3}$ correspondent aux mêmes valeurs de g_1, g_2, g_3.

D'après les identités indiquées, la somme de ces produits, pour toutes les valeurs de g_1, g_2, g_3 est égale à l'unité, s'il est satisfait aux relations

$$k_1 = h_1, \qquad k_2 = h_2, \qquad k_3 = h_3,$$

à zéro, s'il n'en est pas ainsi. Comme conséquence,

$$(18)\qquad \alpha^{(i')}_{k_1.k_2.k_3}$$

$$= \frac{A}{hA_1 r}\sum \frac{T(h_1, h_2, h_3, i)}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}\,\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}}\,\frac{\partial^{2h}[\Gamma'''^{h_1}\Gamma''^{h_2}\Gamma'''^{h_3}\gamma''^{k_1}\gamma'^{k_2}\gamma'''^{k_3}]}{(\partial L\partial l)^{g_1}(\partial L'\partial l')^{g_2}(\partial L''\partial l'')^{g_3}}\,\frac{1}{2i'-h+(g_2-g_3)(M'+1)}.$$

Toutefois, quand $2i' = h$, on doit, dans la formule précédente, modifier les termes qui correspondent à $g_2 - g_3 = 0$, en substituant au quotient

$$\frac{T(h_1, h_2, h_3, i')}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}\,\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}\,[2i'-h+(g_2-g_3)(M'+1)]}$$

une fonction homogène de r et ω, entière et de degré

$$2n + 2 - 3h + 2h_1 + h_3,$$

mais d'ailleurs jusqu'à présent arbitraire. Elle provient du second membre de l'équation (12), F alors n'étant pas nulle.

La formule (18) s'exprime encore d'une autre façon. Les coefficients A, λ ne dépendent point en effet des constantes $L, L', \ldots, l''$, dont on a fait usage pour les construire. En posant donc

$$2l = L, \qquad l' = -L', \qquad l'' = -L'',$$

l'expression de λ n'est pas changée; or $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ deviennent ainsi proportionnels à $\Gamma'', \Gamma''', \Gamma'''$, ce qui permet d'écrire d'abord la relation

$$(19)\qquad \lambda(h_1, h_2, h_3, M') = \frac{1}{(2A_1)^{2h}}\,\frac{(A^2w)^h}{(M'+1)^{2h}}\,2^{h_3+g}(-1)^{g_2-g_3}\omega^{h_1-h_2}A(h_1, h_2, h_3, M')$$

et ensuite celle-ci

$$(20) \qquad \alpha^{(i')}_{k_1,k_2,k_3} = \frac{A}{hA_1 r}\frac{1}{(2A_1)^{2h}}\frac{(A^2 w)^h}{(M'+1)^{2h}}\,\omega^{k_1-k_2}\sum 2^{k_3+g_1}(-1)^{g_2-g_3}$$

$$\times \frac{|\underline{g_1}\,|\underline{g_2}\,|\underline{g_3}}{|\underline{h_1}\,\underline{h_2}\,|\underline{h_3}} A(h_1, h_2, h_3, M')A(k_1, k_2, k_3, M')\frac{T(h_1, h_2, h_3, i')}{2i'-h+(g_2-g_3)(M'+1)}.$$

Soit $M'+1=\partial$, en sorte que l'on ait

$$(21) \qquad A^2 w + C^2 = A_1^2\partial^2,$$

à cause de la relation ((10) § 2). En remplaçant, respectivement, L, L', L'' par $Aw^{\frac{1}{2}}L$, $-iCL'$, $-iCL''$, comme on le peut faire, d'après l'observation précédente, je trouve

$$\Gamma' = \frac{r\Delta'}{A}, \qquad \Gamma'' = \frac{\Delta''}{Awr}, \qquad \Gamma''' = \frac{\Delta'''}{C},$$

avec

$$(22) \qquad \begin{aligned} \Delta' &= LA_1^2\partial^2 - (L''-L')A_1 C\partial - C^2(L+L'+L''), \\ \Delta'' &= LA_1^2\partial^2 + (L''-L')A_1 C\partial - C^2(L+L'+L''), \\ \Delta''' &= C^2(L+L'+L''). \end{aligned}$$

Il en résulte pour A cette expression nouvelle

$$(23) \qquad A(h_1, h_2, h_3, M') = \frac{i^{h+g_1}}{|\underline{g_1}\,|\underline{g_2}\,|\underline{g_3}\,C^{h_3+h}}\frac{1}{(Awr)^{h_1}}\left(\frac{r}{A}\right)^{h_2}\left(\frac{-C}{Aw^{\frac{1}{2}}}\right)^{g_1}\frac{\partial^h[\Delta''^{h_1}\Delta'^{h_2}\Delta'''^{h_3}]}{\partial L^{g_1}\partial L'^{g_2}\partial L''^{g_3}}$$

Je remarque encore l'identité

$$\theta(h_1, h_2, h_3, i') = -\omega^{2h_1+h_3-2i'}\theta(h_2, h_1, h_3, h-i'-1),$$

déduite de ((21) § 4) et de laquelle on conclut

$$T(h_1, h_2, h_3, i') = -\omega^{2h_1+h_3-2i'}T(h_2, h_1, h_3, h-i').$$

§ 6. *Valeurs exceptionnelles du rapport w. Elles introduiraient des logarithmes, qui disparaissent après un choix convenable des arbitraires dont on dispose.*

Les formules des deux paragraphes précédents sont sujettes à des exceptions qu'il est aisé d'apercevoir et qui répondent à certaines valeurs particulières du rapport $w = \frac{\omega}{r^2}$. L'une d'elles s'était offerte déjà donc l'intégration du système (b). S'il arrive en effet que l'on ait $\delta = 0$ c'est à dire

$$A^2 w + C^2 = 0, \tag{1}$$

l'équation caractéristique de ce système, qui n'est autre que l'équation ((10) § 2), possède deux racines égales, en sorte que, pour avoir toutes les solutions distinctes, relatives à cette valeur de w, l'on doit introduire, non plus seulement des puissances de y_1, mais des termes logarithmiques. La même circonstance peut encore se présenter, et pour plusieurs valeurs de ξ, dans l'intégration du système (a), car tous les termes pour lesquels

$$2i' - h + (g_2 - g_3)\delta = 0, \tag{2}$$

introduisent, dans l'équation (12) du paragraphe précédent, non point une puissance de y_1, mais un logarithme. Les valeurs du rapport w, définies par les égalités (1) et (2), sont ce que nous avons appelé des valeurs exceptionnelles. Elles sont de la première catégorie, quand l'égalité (1) est vérifiée; de la seconde, dans le cas contraire.

Afin que leur présence n'empêche point d'être algébriques les intégrales du système (a), quelles sont les conditions à remplir?

Les formules ((20) § 5) font connaître les quantités $\alpha^{(i')}_{k_1, k_2, k_3}$ comme sommes de certains quotients; elles ne contiennent, on le voit sans peine, que des puissances paires de δ et sont, par conséquent, de forme rationnelle, mais elles doivent être entières, puisque l'intégrale cherchée l'est elle-même et d'ailleurs, en vertu de l'analyse précédente, les seules solutions du système (a), qui soient en général finies pour les valeurs exceptionnelles du rapport w, renferment des transcendantes logarithmiques,

à moins que ces valeurs ne correspondent à aucune singularité: ceci exige que, dans les expressions (20),

1° tous les dénominateurs

$$2i' - h + (g_2 - g_3)\delta$$

divisent les numérateurs correspondants,

$$\sum \frac{AT}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}};$$

2° que la somme des quotients obtenus soit divisible par δ^{2h}.

Pour faire en sorte qu'il en soit ainsi, l'on dispose de la fonction ρ, à laquelle se réduit l'intégrale R, quand μ s'évanouit, des polynômes arbitraires provenant des équations ((12) § 5), pour lesquelles F n'est pas nulle; on a vu que ces derniers existent lorsque h est pair et $g_2 = g_3$, mais ne se présentent dans aucun autre cas. Il reste à savoir si l'on peut choisir ces arbitraires de telle façon que les conditions indiquées soient remplies.

C'est ce que peuvent établir les résultats du § 3, dont je rappelle les conclusions:

Pourvu que $\sin\varepsilon$ soit égal à zéro, et le rapport $\frac{2C}{A}$ à un nombre entier, il existe, outre les trois intégrales communes à tous les cas, une quatrième intégrale algébrique, admissible pour des valeurs infiniment petites de y_1, z_1 et x_3. Cela étant, j'observe que rien n'empêche d'attribuer au rapport $\frac{\omega}{r^2}$ l'une quelconque des valeurs exceptionnelles, bien que les trois quantités y_1, z_1 et x_3 demeurent infiniment petites. Voici comment on peut s'en convaincre. Je regarde les inconnues du problème comme renfermant un certain paramètre φ, de telle façon que, si ce dernier s'annule, on en puisse conclure

$$y_1 = z_1 = x_3 = 0;$$

les valeurs infiniment petites de φ répondent alors aux solutions infiniment voisines de cette solution simple. Les notations du § 3 étant conservées, le point est de montrer qu'avec les expressions trouvées pour η_1, $y_2 + \eta_2$, ..., etc., ξ_3, on a le moyen de construire quatre combinaisons algébriques dont les arbitraires demeurent limitées, quand w reçoit ses

valeurs critiques. A cet effet, comme y_1 est nul, η_1 infiniment petit, j'imagine que r s'approche de zéro et cela, de telle manière que, ni le rapport

$$\frac{\eta_1}{r^2},$$

ni son inverse, ne tendent à s'évanouir. J'ai donné déjà des formules qui se laissent représenter ainsi

$$(3)\qquad z^{\frac{C}{A}-1}y_2 = h_1, \qquad Cr^2 = \mu z_2 + H,$$

$$\frac{y_2\eta_1}{r} = \frac{1}{2}h_1\sqrt{C}\left|\mu\alpha h_1\int \frac{z^{-\frac{2C}{A}}dz_2}{(\mu z_2+H)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\beta\mu}{A}\int\frac{z_2^{-\frac{C}{A}}dz_2}{(\mu z_2+H)^{\frac{3}{2}}} + 2\gamma\right|;$$

h_1, H, ainsi que α, β, γ, sont des constantes à volonté, les trois dernières seulement de l'ordre du paramètre φ. Ces égalités mettent en évidence ce qu'il s'agissait d'établir: en conservant aux constantes des valeurs finies dans les quatre intégrales algébriques satisfaites par les solutions infiniment voisines de la solution simple, on a pu faire tendre le rapport w vers une de ses valeurs exceptionnelles. Puisqu'il ne s'est pourtant introduit aucun logarithme, c'est qu'il est possible de déterminer les polynômes arbitraires que l'on possédait, de telle manière que les divisions indiquées s'effectuent sans aucun reste. Ayant donc construit, par les procédés des §§ 4 et 5, une intégrale R, de même degré que la précédente et, cette fois, sans rien supposer sur l'ordre de grandeur de y_1, z_1 et x_3, on est assuré de lui pouvoir donner une forme entière; mais je dois ajouter à ce sujet quelques explications.

Je dis que, s'il y avait des logarithmes dans deux intégrales, distinctes et d'ordinaire finies pour toutes les valeurs critiques du rapport w, ces logarithmes subsisteraient dans des équations intégrales qu'on sait obtenir (celles qui définissent les expressions trouvées pour $\eta_1, \eta_2, \ldots, \xi_3$) et ne permettraient pas d'en former quatre combinaisons algébriques.

J'ai déjà prouvé l'existence de ces dernières, sous certaines conditions que je suppose désormais remplies. L'une de ces combinaisons fait connaître les premiers éléments d'une intégrale nouvelle, développée selon les puissances d'un paramètre φ, différent de μ. Mais, parmi les éléments, dans

lesquels entre φ au degré le plus proche de zéro, il est clair qu'il y en a de tous les degrés d'homogénéité inférieurs à un certain nombre entier, lié au quotient $\frac{2C}{A}$. Or voici ce qu'on en doit conclure. De tous les coefficients, que j'ai représentés par $\alpha^{(i')}_{h_1.h_2.h_3}$, il en est un pour chaque valeur de l'indice h et, à cause d'une symétrie déjà signalée, il en est au moins deux, qui sont algébriques et entiers. Cela exige l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes:

1°. Tous les coefficients appartenant à un même indice h sont des polynômes entiers en ω, r^2.

2°. Les coefficients appartenant à un même indice h ne sont pas tous débarrassés des transcendantes, bien que quelques-uns satisfassent à cette condition. Dans chacun d'eux et pour chaque valeur critique de la seconde catégorie, $\log y_1$ se présente multiplié par une fonction linéaire et homogène des expressions

$$\sum \frac{AT}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}}, \tag{4}$$

où il faut imaginer que δ soit remplacé par $\frac{2i'-h}{g_2-g_3}$. Afin que le logarithme ne puisse jamais s'introduire dans un coefficient d'indices déterminés, les relations nécessaires sont en nombre égal à celui des quantités (4), qu'elles contiennent au premier degré. Les équations ainsi obtenues sont homogènes et il est évident que leur déterminant n'est pas nul, car il est le produit de plusieurs autres, invariablement égaux à l'unité. Leurs inconnues, c'est à dire les quantités (4) elles-mêmes, doivent donc s'évanouir et, comme conséquence, tous les coefficients $\alpha^{(i')}_{h_1.h_2.h_3}$ demeurent algébriques, pourvu du moins que δ diffère de zéro.

Lorsque δ s'annule, ce qui donne une valeur critique de la première catégorie, une solution des systèmes linéaires (a) § 5, restant en général finie, peut renfermer $\log y_1$ et même plusieurs de ses puissances; mais, comme ce log peut être augmenté d'un multiple quelconque de $2i\pi$, l'on voit que de la solution connue l'on en sait déduire une autre, de degré moindre en $\log y_1$, en sorte qu'il y a nécessairement, pour les systèmes linéaires indiqués, une solution non transcendante et sans cesse finie, comme il le fallait établir

Soit n la plus haute puissance de μ que l'on trouve dans l'expression R; une conséquence de la disparition des dénominateurs qui figuraient dans la formule ((20) § 5), c'est que le coefficient de μ^n ne contient plus ω ni r^2, étant à leur égard de degré zéro; (en vertu de la relation ((21) § 4), quand $h = n$, $2h_1 + h_3 - 2k$ s'annule et représente précisément le degré de $\alpha^{(k)}_{h_1 h_2 h_3}$). Ce coefficient de μ^n est alors une fonction entière des seules variables z_1, z_2 et x_3. Cela suffit pour que R_{n+1} s'évanouisse, c'est à dire que R soit effectivement une intégrale, entière et de degré n. Ainsi les deux conditions

$$\sin\varepsilon = 0,$$

$$\frac{2C}{A} \text{ égal à un nombre entier,}$$

reconnues nécessaires afin que le problème de la rotation admette une quatrième intégrale algébrique, sont aussi suffisantes.

§ 7. *Solutions développées en séries quand,* $\sin\varepsilon$ *étant nul, le rapport* $\frac{2C}{A}$ *demeure quelconque. Convergence dans les cas ordinaires. Conséquences relatives aux propriétés des intégrales, lorsque* $\frac{2C}{A}$ *devient un nombre entier.*

Les équations différentielles sont les suivantes, (§ 3),

$$(1)\quad \begin{aligned} &A\frac{dy_1}{d\tau} = -(A_1 r y_1 + \mu x_3), \quad A\frac{dy_2}{d\tau} = A_1 r y_2 + \mu x_3, \quad 2C\frac{dr}{d\tau} = \mu(z_2 - z_1), \\ &\frac{dz_1}{d\tau} = x_3 y_1 - r z_1, \qquad \frac{dz_2}{d\tau} = r z_2 - x_3 y_2, \qquad 2\frac{dx_3}{d\tau} = y_2 z_1 - y_1 z_2, \end{aligned}$$

dans l'hypothèse où $\sin\varepsilon$ est égal à zéro; les inconnues $y_1, y_2, \ldots, x_3$, qui les vérifient, se développent en général selon les puissances entières de μ, de cette manière,

$$(2)\qquad y_1 = y_{1.0} + \mu y_{1.1} + \cdots, \quad \ldots, \quad x_3 = x_{3.0} + \mu x_{3.1} + \cdots$$

et les premiers termes des séries précédentes sont données par un calcul simple; je trouve d'abord

$$(3) \qquad y_{1.0} = \beta_1 e^{-\frac{A_1 r_0}{A}\tau}, \qquad y_{2.0} = \beta_2 e^{\frac{A_1 r_0}{A}\tau},$$

β_1, β_2, r_0 désignant des constantes arbitraires; puis, après avoir posé

$$(4) \qquad \theta = e^{\frac{A_1 r_0}{A}\tau}, \qquad z_1 = \zeta_1 \theta^{-1}, \qquad z_2 = \zeta_2 \theta,$$

pour déterminer $\zeta_{1.0}, \ldots, x_{3.0}$ j'obtiens un système linéaire

$$(5) \qquad \begin{gathered} \frac{d\zeta_{1.0}}{d\tau} + \frac{Cr_0}{A}\zeta_{1.0} - \beta_1 x_{3.0} = 0, \qquad \frac{d\zeta_{2.0}}{d\tau} - \frac{Cr_0}{A}\zeta_{2.0} + \beta_2 x_{3.0} = 0, \\ \frac{2dx_{3.0}}{d\tau} - \beta_2\zeta_{1.0} + \beta_1\zeta_{2.0} = 0, \end{gathered}$$

à coefficients constants, dont voici l'équation caractéristique

$$(6) \qquad s\left(s^2 - \beta_1\beta_2 - \frac{C^2 r_0^2}{A^2}\right) = 0.$$

Comme conséquence

$$(7) \qquad \begin{gathered} \beta_2\zeta_{1.0} + \beta_1\zeta_{2.0} + \frac{2Cr_0}{A}x_{3.0} = \beta_3, \qquad \frac{\beta_2\zeta_{1.0}}{\frac{Cr_0}{A} - s} + \frac{\beta_1\zeta_{2.0}}{\frac{Cr_0}{A} + s} + 2x_{3.0} = \beta_4 e^{-s\tau}, \\ \frac{\beta_2\zeta_{1.0}}{\frac{Cr_0}{A} + s} + \frac{\beta_1\zeta_{2.0}}{\frac{Cr_0}{A} - s} + 2x_{3.0} = \beta_5 e^{s\tau}; \end{gathered}$$

$\beta_3, \beta_4, \beta_5$ représentent encore, dans ces formules, des arbitraires, s l'une des deux valeurs différentes de zéro qui vérifient l'équation caractéristique.

Soit $e^{s\tau} = \sigma$; des relations (7) il résulte celles-ci

$$(8) \qquad \begin{aligned} \zeta_{1.0} &= \frac{\beta_1}{4s^2}\left[\left(s - \frac{Cr_0}{A}\right)\beta_5\sigma + 2\beta_3 - \left(s + \frac{Cr_0}{A}\right)\beta_4\sigma^{-1}\right], \\ \zeta_{2.0} &= \frac{\beta_2}{4s^2}\left[\left(s - \frac{Cr_0}{A}\right)\beta_4\sigma^{-1} + 2\beta_3 - \left(s + \frac{Cr_0}{A}\right)\beta_5\sigma\right], \\ x_{3.0} &= \frac{\beta_1\beta_2}{4s^2}\left[\beta_4\sigma^{-1} + \frac{2Cr_0}{A}\frac{\beta_3}{\beta_1\beta_2} + \beta_5\sigma\right], \end{aligned}$$

qui achèvent de définir les premiers termes des séries (2).

Parmi ceux de l'ordre suivant, trois sont déterminés par des quadratures immédiates, ce sont $r_1, y_{1.1}, y_{2.1}$; les trois autres résultent de l'intégration d'un système linéaire, à coefficients constants, qui diffère du système (5) en un seul point: Les seconds membres, au lieu d'être nuls, sont des fonctions données de la variable τ.

Dans ce calcul, il s'introduit six nouvelles constantes arbitraires, que je supposerai choisies, par exemple de telle façon que les six quantités

$$y_{1.1}, \ldots, x_{3.1},$$

s'évanouissent à la fois quand τ lui-même s'annule.

D'une manière générale, on voit sans peine que, si les termes des séries cherchées sont regardés comme connus, jusques et y compris l'ordre $h - 1$, les termes de l'ordre h s'en déduisent, les trois premiers,

$$r_h, \; y_{1.h}, \; y_{2.h}, \tag{9}$$

par des quadratures immédiates, les trois autres,

$$\zeta_{1.h}, \; \zeta_{2.h}, \; x_{3.h} \tag{10}$$

par l'intégration d'un système linéaire à coefficients constants. Celui-ci ne diffère de (5) que par la présence, dans chaque équation, d'un second membre, représenté par une fonction déjà connue de la variable τ.

Je ne crois pas utile de transcrire ici les formules qui résultent de cette intégration et je me borne à quelques remarques, dont l'exactitude est évidente.

Les six termes d'un même ordre h sont exprimés par des polynômes entiers, au moyen de τ et des exponentielles,

$$\theta, \; \theta^{-1}, \; \sigma, \; \sigma^{-1}.$$

Ce sont aussi des fonctions entières de $\beta_3, \beta_4, \beta_5$; elles sont homogènes à l'égard de cet ensemble, les trois inconnues (9) étant du degré h, les trois dernières (10), de degré $h + 1$; les coefficients qui y figurent sont enfin des fonctions rationnelles de s et de β_1, β_2, r_0; j'ajoute qu'elles jouissent encore d'une seconde homogénéité.

Afin d'en donner la définition, j'imagine que $\beta_1, \beta_2, r_0, \beta_4, \beta_5$ et par suite s soient regardés, ainsi que μ, comme étant de degré 1, β_3 du

degré 2, τ du degré -1; alors σ, θ sont du degré zéro, $y_{1.h}, \ldots, x_{3.h}$, sont homogènes et de degré $1-h$, $y_1, \ldots, x_3$, sont aussi homogènes et de degré 1.

Il est naturel de se demander si les séries ainsi obtenues sont en général convergentes; c'est ce que la démonstration suivante permet d'affirmer:

L'un des théorèmes de M. Poincaré prouve que la convergence a lieu, quelles que soient les valeurs de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5$ et de τ, pourvu que μ reste compris dans un certain domaine. Un seul cas fait exception à cette règle; il se présente quand les valeurs choisies pour τ et les constantes initiales $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5$ font »passer» la solution correspondante par un point singulier.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, mais que $|\mu|$ soit supérieur à cette limite pour laquelle la convergence est assurée. En posant $\mu = \mu'\mu''$, rien n'empêche de prendre $|\mu'|$ au dessous de la limite indiquée; les séries, ordonnées selon les puissances de μ', convergentes en vertu de l'hypothèse précédente, développent alors les inconnues, pour toute valeur ordinaire de τ et des constantes, après substitution de μ' à μ. Mais, à cause d'une homogénéité déjà signalée, l'on peut changer μ' en μ, si l'on remplace aussi $\beta_3, \ldots, \beta_5$ par $\frac{\beta_3}{\mu''}, \ldots, \frac{\beta_5}{\mu''}$ et, puisque les séries convergeaient pour toute valeur ordinaire de ces paramètres, avec la détermination adoptée pour μ', la conclusion nécessaire est qu'elles convergent pour toute valeur de μ.

Quand la solution considérée va »passer» par un point critique, la divergence peut se produire. Les valeurs de τ et des inconnues, relatives à ce point, doivent visiblement être telles qu'en le prenant pour origine, quelques-unes des fonctions $y_{1.h}, \ldots, x_{3.h}$, construites d'après cette nouvelle hypothèse, cessent d'être finies ou tout au moins d'être représentées par l'expression analytique qui leur convient dans les cas ordinaires.

Les formules obtenues montrent que ces circonstances sont toujours évitées, à moins que la variable τ croisse indéfiniment ou que le rapport

$$\frac{A_1 c_0}{A s}$$

soit un nombre commensurable. En conséquence et tenant compte des

égalités (3) et (6), on voit que les valeurs de ω et r qui répondent à des points critiques sont définies par des relations de cette espèce

$$(11) \qquad \frac{A_1^2 r^2}{A^2\omega + C^2 r^2} = \frac{m''^2}{m'^2},$$

où j'ai désigné par m', m'' deux nombres entiers réels; ces points peuvent aussi s'offrir quand τ devient supérieur à toute quantité donnée.

Au commencement de ce paragraphe, j'ai montré que les inconnues se développent en séries ordonnées selon les puissances positives de μ, les coefficients de ces puissances étant des fonctions entières de τ et des exponentielles $\theta, \sigma, \theta^{-1}, \sigma^{-1}$. Elles sont ainsi représentées par les formules,

$$(12) \qquad \begin{aligned} y_1 &= y_{1.0} + \mu y_{1.1} + \dots + \mu^n y_{1.n} + \mu^{n+1}[y_{1.n+1}], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_3 &= x_{3.0} + \mu x_{3.1} + \dots + \mu^n x_{3.n} + \mu^{n+1}[x_{3.n+1}], \end{aligned}$$

dans lesquelles $[y_{1.n+1}], \dots, [x_{3.n+1}]$ désignent des expressions, non développées, mais qui tendent vers des limites finies lorsque μ tend vers zéro. Entre ces relations, au nombre de six, σ, θ, traitées comme des variables distinctes, peuvent être éliminés par des opérations algébriques. Les quatre équations obtenues sont rationnelles à l'égard des différences,

$$(13) \qquad y_1 - \mu^{n+1}[y_{1.n+1}], \ \dots, \ x_3 - \mu^{n+1}[x_{3.n+1}]$$

et de τ. Si cette dernière variable y figure effectivement, ce qui est le cas ordinaire, elle peut aussi être éliminée par des opérations rationnelles et cela, de plusieurs façons. Il est clair que les équations ainsi construites résultent des trois intégrales, toujours existantes, où les inconnues toutefois sont remplacées par leurs valeurs approchées (13).

Imaginons maintenant qu'après avoir choisi le rapport $\frac{C}{A}$ comme il convient, il y ait une quatrième intégrale algébrique et, par suite, une intégrale homogène et entière, de degré n à l'égard du paramètre μ. Elle implique pour $y_1, y_2, \dots, x_3$ une relation, également vérifiée jusqu'aux termes en μ^{n+1}, par les expressions précédentes (13), qui représentaient la n^e approximation. Au reste, les équations calculées en éliminant θ, σ ne peuvent être en nombre supérieur à quatre; il est donc nécessaire que

la variable τ elle-même n'y entre pas. Cette condition satisfaite, voici comment on peut former les équations dont il s'agit.

Je traite d'abord σ, θ, σ^{-1}, θ^{-1}, comme des indéterminées distinctes, que j'élimine et, le faisant, je suis conduit à calculer ces quantités en fonctions rationnelles des différences (1). Or le produit des expressions attribuées à $\beta_2\theta$, $\beta_1\theta^{-1}$ constitue une équation intégrale, aux termes près qui ont en facteur μ^{n+1}. De ces deux expressions, ni l'un ni l'autre ne peut renfermer τ, puisque leur produit ne le renferme pas; si l'une d'elles est annulée, il en résulte avec la même approximation une équation invariante, algébrique, qui n'est point une intégrale; pareille remarque est encore vraie pour la seconde. D'après cela, je construis, ce qui est possible, un polynôme entier, homogène, doué de cette propriété qu'en l'égalant à zéro et tenant compte des trois intégrales communes à tous les cas, on reproduise, jusqu'aux termes en μ^n au moins, l'une des deux équations invariantes qui viennent d'être indiquées. La même opération étant faite pour l'autre, l'un de ces deux polynômes homogènes, T_1, T_2, se déduit du second, lorsqu'on y permute y_1 avec y_2, z_1 avec z_2; c'est donc leur produit qui représente, avec l'approximation voulue, la quatrième intégrale, dont l'existence est supposée.

Il est clair que ceci est inadmissible, à moins,

que le nombre n soit pair,

qu'aucune des deux polynômes T_1, T_2, ne possède de termes, dont le degré soit supérieur à $\frac{n}{2}$, les homogénéités et la symétrie s'y opposant,

que chacun de ces polynômes, égalé à zéro, constitue une équation invariante et que le premier membre de l'intégrale soit décomposable en ces deux facteurs.

Mais, dans T_1, la partie indépendante de μ peut être représentée ainsi,

$$Ty_1^e,$$

pendant qu'elle l'est dans T_2 par

$$Ty_2^e:$$

T désigne alors une fonction de r^2 et ω qui, en vertu de la symétrie,

est la même dans les deux cas. Il s'ensuit que, sous sa forme décomposable, l'intégrale commence par

$$T^2 . \omega^e .$$

J'ajoute que e doit être pair, car le dernier terme de chaque polynôme T_1, T_2, est une fonction entière de z_1, z_2, x_3, ce qui signifie que son degré d'homogénéité est un nombre pair.

Le premier terme de l'intégrale est donc un carré parfait; sa racine est divisible, au moins une fois, par ω; il resterait à définir ses autres diviseurs. J'observe d'abord que si, dans T_1 ou T_2, on donne à $y_1, y_2, \ldots, x_3$ des valeurs qui ne font pas évanouir le polynôme considéré, il devient une constante, multipliée par l'exponentielle

$$e^{-\lambda_2 \int r d\tau}$$

ou par son inverse, en sorte que

$$T_1 = T_1^{(0)} e^{-\lambda_2 \int r d\tau}, \qquad T_2 = T_2^{(0)} e^{\lambda_2 \int r d\tau}, \qquad R = T_1^{(0)} T_2^{(0)};$$

c'est ce que l'on a vu déjà dans le § 1.

Imaginons que la constante $T_1^{(0)} T_2^{(0)}$ soit donnée, indépendante de μ, et considérons les expressions de $y_1, y_2, \ldots, x_3$ qui lui rendent égale l'intégrale R. Quand $\frac{\omega}{r^2}$ prend l'une des valeurs qui font évanouir le premier terme ρ de l'intégrale, tous les autres ayant en facteur μ, le produit $T_1^{(0)} T_2^{(0)}$, qui ne dépend pas de μ par hypothèse, doit être nul, à moins que certaines des inconnues augmentent sans limites avec $\frac{1}{\mu}$. De même, T_1, par exemple, peut s'évanouir, même quand $T_1^{(0)}$ n'est pas nulle; $\int r d\tau$ est alors infinie, ce qui exige, ou bien que τ le soit aussi, ou bien que le rapport $\frac{\omega}{r^2}$ atteigne l'une des valeurs (11).

Ces remarques faites, il est évident qu'on peut satisfaire à l'ensemble des conditions suivantes:

1°. $T_1^{(0)}$, $T_2^{(0)}$ ne sont pas nulles et ne dépendent pas de μ;

2° les valeurs attribuées à τ ne tendent pas vers l'infini, cependant

elles donnent au rapport $\frac{\omega}{r^2}$ l'une des valeurs annulant le premier terme de l'intégrale R.

Alors l'un des dénominateurs que contient r s'évanouit et l'on en conclut que les racines de T sont comprises dans cette formule

$$m''^2(A^2\omega + C^2 r^2) - m'^2 A_1^2 r^2 = 0,$$

où les nombres entiers m', m'', ne sont pas connus.

§ 8. *Remarques sur les moyens d'achever la détermination de l'intégrale. Proposition relative aux systèmes différentiels ayant des intégrales uniformes.*

J'ai montré § 5 comment se déduisent les uns des autres les différents termes d'une intégrale, supposée homogène et entière. Comme le degré de cette dernière est limité (§ 6), pour chaque valeur admissible du rapport $\frac{C}{A}$, son calcul au moyen de coefficients indéterminés n'offre, en théorie, pas de difficultés; en fait une méthode aussi directe ne peut convenir, ni dans l'étude générale du problème, parce qu'il s'agit surtout alors d'une solution formelle, ni même dans les cas particuliers les plus simples, en raison des opérations trop nombreuses qu'elle nécessite. Le point le plus important serait d'obtenir, pour le terme indépendant de μ dans le polynôme R, des propriétés qui le caractérisent sans l'intervention de tous les autres. Un premier pas a été fait dans cette voie vers la fin du paragraphe précédent; toutefois, le résultat établi ne suffit pas et, malgré l'intérêt visible qui s'attache à la question, non seulement dans les cas d'intégration algébrique, mais même dans les recherches relatives à l'intégration uniforme, je suis obligé d'en laisser l'étude encore incomplète, me proposant de la joindre, s'il est possible, à un prochain Mémoire. Je me borne, sur ce sujet, aux remarques suivantes, qui mettent sous un jour nouveau les propriétés des solutions périodiques.

Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad (1 \leq i \leq m), \tag{1}$$

dont les seconds membres ne dépendent que de $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Je suppose que, parmi leurs intégrales, $m-2$ soient connues et uniformes et ne contiennent pas t. Par elles je puis exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en fonction de x_1, x_2, et de $m-2$ constantes arbitraires $\alpha_3, \ldots, \alpha_m$. Soit Δ_2 le déterminant

$$\sum \pm \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \cdots \frac{\partial x_m}{\partial a_m},$$

$\Delta_3, \Delta_4, \ldots, \Delta_m$, les déterminants de même espèce qui résultent de la substitution de x_2 à $x_3, x_4, \ldots, x_m$, dans Δ_2, suivie d'un changement de signe. D'après les équations proposées,

$$(2) \qquad \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_i}{X_1}\right)\frac{\partial x_2}{\partial a_k} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{X_i}{X_1}\right)\frac{\partial x_m}{\partial a_k}$$

et, comme conséquence,

$$(3) \quad \frac{d\Delta_2}{dx_1} = \Delta_2\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{X_3}{X_1}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{X_m}{X_1}\right)\right] - \Delta_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_3}{X_1}\right) - \ldots - \Delta_m \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_m}{X_1}\right);$$

de sorte qu'en posant pour abréger

$$(4) \qquad \sigma_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_2}{X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{X_3}{X_1}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{X_m}{X_1}\right),$$

l'équation précédente et ses analogues se laissent ainsi représenter

$$\frac{d\Delta_2}{dx_1} + \Delta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_2}{X_1}\right) + \ldots + \Delta_m \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_m}{X_1}\right) = \sigma_1 \Delta_2,$$

$$(5) \qquad \frac{d\Delta_3}{dx_1} + \Delta_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{X_2}{X_1}\right) + \ldots + \Delta_m \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{X_m}{X_1}\right) = \sigma_1 \Delta_3,$$

etc.

Quand $x_2, x_3, \ldots, x_m$ sont supposées connues en fonction de x_1 et des arbitraires, les relations (5) définissent $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_m$ et, de plus, sont linéaires. Si la variable indépendante, x_1, décrit un cycle *et qu'il en soit de même de* $x_2, x_3, \ldots, x_m$, un système fondamental de solutions des

équations précédentes subit une substitution. Mais l'une de ces solutions est composée de fonctions uniformes en $x_1, x_2, \ldots, x_m$, lorsque les intégrales connues $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_m$ sont elles-mêmes uniformes. En conséquence, cette solution n'est pas altérée par les substitutions dont il s'agit. Si donc on considère le groupe de ces dernières, quand la variable x_1 décrit tous les cycles déjà définis, ce groupe ne peut point être primaire.

Imaginons que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_m$ dépendent d'un paramètre μ et que l'on sache intégrer le système (1), quand μ est égal à zéro. D'après un théorème de M. Poincaré, on peut, pour des valeurs assez petites de ce paramètre, développer les solutions suivant les puissances de μ; par suite, les coefficients des équations (5) seront développés de la même manière ainsi que, dans le groupe précédent, les coefficients des substitutions fondamentales.

Après avoir calculé ces coefficients, jusqu'aux termes en μ^n et sachant d'ailleurs, non pas obtenir les $m-2$ intégrales uniformes, mais exprimer $x_3, x_4, \ldots, x_m$ en fonction de x_1, x_2 et de $m-2$ constantes, liées d'une façon quelconque aux valeurs initiales des variables, on pourra

1° vérifier que le groupe des équations (5) n'est pas primaire;

2° choisir leurs solutions fondamentales de manière à présenter ce groupe sous la forme typique, c'est à dire mettre en évidence les sous-groupes dont il se compose. Or ceci consiste à remplacer les arbitraires par d'autres, fonctions données des précédentes et parmi lesquelles doivent être comprises les intégrales uniformes. Quand une seule de ces dernières reste inconnue, il en résulte pour elle et notamment pour celui de ses termes qui ne s'annule pas avec μ, des conditions à satisfaire, celles que je voulais signaler.

Dans le problème de la rotation, j'ai montré, (§ 7), comment les inconnues $y_1, y_2, \ldots, x_3$ et, par suite aussi, les déterminants, solutions d'un système semblable à (5), s'expriment en fonction de la variable τ et de six constantes arbitraires. Les trois intégrales uniformes, communes à tous les cas, sont liées à ces dernières par des relations simples. Les cycles décrits par l'une des inconnues, prise pour variable, doivent être tels que toutes les autres décrivent aussi des cycles; c'est dire qu'il faut considérer une solution périodique et laisser τ s'accroître d'une période, lorsque la variable nouvelle, z_1 par exemple, décrit un cycle.

Les équations différentielles ((1) § 7) n'ayant aucun point singulier à distance finie, pourvu que τ soit la variable indépendante, l'unique groupe admissible est celui qui correspond aux solutions périodiques; sa recherche n'offre rien dont la théorie soit difficile, mais les opérations sont encore assez longues pour qu'il soit indispensable de les abréger à l'aide de quelques artifices; j'en remets l'étude à une autre occasion.

SUR L'INTÉGRALE FINIE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR

A. HURWITZ

À ZÜRICH.

D'après ABEL nous entendons par l'intégrale finie d'une fonction $G(z)$ la solution la plus générale de l'équation

$$(1) \qquad F(z+1) - F(z) = G(z).$$

$F(z)$ étant une solution particulière de cette équation, la solution la plus générale sera évidemment $F(z) + \varphi(z)$, où $\varphi(z)$ désigne une fonction arbitraire qui admet la période 1.

Dans ce qui suit nous nous occuperons de l'équation (1) en supposant que la fonction donnée $G(z)$ est une fonction entière, c'est à dire que $G(z)$ peut être représentée par une série entière

$$(2) \qquad G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

convergente dans tout le plan. Le même cas fait l'objet principal d'un mémoire de M. C. GUICHARD.[1] En s'aidant des intégrales à coupures de M. HERMITE l'éminent géomètre prouve que, $G(z)$ étant une fonction entière, il existe toujours une solution $F(z)$ de l'équation (1) qui est elle-même une fonction entière. J'arrive au même résultat en suivant une voie toute différente. On verra que le même ordre d'idées que celui qui fait la base du théorème de M. MITTAG-LEFFLER m'amène au but.

[1] *Sur la résolution de l'équation aux différences finies* $G(x+1) - G(x) = H(x)$. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 3me série, t. 4. (1887.)

Soit $\varphi_n(z)$ la fonction de Bernoulli, c'est à dire la fonction rationelle entière de degré $n+1$ qui s'annule pour $z=0$ et qui satisfait à l'équation

$$(3)\qquad \varphi_n(z+1)-\varphi_n(z)=z^n.$$

Il est évident que la série

$$(4)\qquad F(z)=a_0\varphi_0(z)+a_1\varphi_1(z)+a_2\varphi_2(z)+\ldots$$

satisfait formellement à l'équation (1). Or, d'après un théorème fondamental de M. Weierstrass, la série (4) définit une fonction entière $F(z)$, si elle converge uniformément dans toute région finie du plan. Ainsi, dans ce cas, nous n'avons rien à démontrer.

Supposons maintenant que la série (4) ne satisfasse pas aux conditions du théorème de M. Weierstrass. Considérons alors au lieu de la série (4) la série suivante

$$(4')\qquad F(z)=a_0(\varphi_0(z)-\pi_0(z))+a_1(\varphi_1(z)-\pi_1(z))+a_2(\varphi_2(z)-\pi_2(z))+\ldots,$$

$\pi_0(z)$, $\pi_1(z)$, $\pi_2(z)$, ... désignant des fonctions rationelles entières de $e^{2\pi iz}$ et $e^{-2\pi iz}$. Cette nouvelle série, comme l'ancienne, satisfait formellement à l'équation (1). Nous ferons voir par les considérations qui suivent que l'on peut toujours disposer des fonctions $\pi_0(z)$, $\pi_1(z)$, $\pi_2(z)$, ... de façon que la série (4') soit uniformément convergente dans toute région finie du plan et ainsi, le théorème de M. Guichard sera démontré. Il suffit comme nous verrons, de prendre pour $\pi_n(z)$ un certain nombre de termes de la série de Fourier représentant dans l'intervalle réel $0<z<1$ la fonction $\varphi_n(z)$.

Remarquons d'abord que la fonction $\varphi_n(z)$ est le coefficient de $\frac{\zeta^n}{\lfloor n}$ dans le développement suivant les puissances entières de ζ de la fonction

$$(5)\qquad f(z,\zeta)=\frac{e^{z\zeta}-1}{e^{\zeta}-1}.$$

C'est un fait connu, qui résulte d'ailleurs immédiatement des équations

$$f(z+1,\zeta)-f(z,\zeta)=e^{z\zeta},\qquad f(0,\zeta)=0.$$

Ainsi nous avons

$$f(z, \zeta) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)\frac{\zeta}{\lfloor 1} + \varphi_2(z)\frac{\zeta^2}{\lfloor 2} + \ldots \tag{6}$$

pour toute valeur finie de z et toute valeur de ζ satisfaisant à la condition $|\zeta| < 2\pi$. Par conséquent nous avons aussi

$$\varphi_n(z) = \frac{\lfloor n}{2\pi i}\int f(z, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \tag{7}$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct autour du point $\zeta = 0$.

Maintenant soit r un nombre entier nul ou positif et C_r une courbe fermée contenant à son intérieur les points

$$0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots, \pm 2r\pi i,$$

tandis que les points $\pm 2k\pi i$ $(k > r)$ sont à son extérieur. Considérons l'intégrale

$$\psi_{n,r}(z) = \frac{\lfloor n}{2\pi i}\int_{C_r} f(z, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \tag{8}$$

qui se réduit à l'intégrale (7) pour $r = 0$. En appliquant le théorème de Cauchy nous trouvons

$$\psi_{n,r}(z) = \varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z), \tag{9}$$

où nous avons posé

$$\pi_{n,r}(z) = \lfloor n \sum \frac{1 - e^{2k\pi i z}}{(2k\pi i)^{n+1}}. \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm r) \tag{10}$$

Soit R une région finie quelconque du plan des z. On a le théorème suivant qui est fondamental pour notre objet:

Pour chaque valeur de z qui appartient à la région R on a

$$|\psi_{n,r}(z)| < \frac{16\rho}{\pi}\cdot\frac{\lfloor n}{(2r+1)^n}\frac{\rho^{2r}}{\pi^n}, \tag{11}$$

ρ désignant une quantité positive ne dépendant que de la région R et nullement de n et de r.

Pour le démontrer, choisissons le contour d'intégration C_r de l'intégrale (8) de la manière suivante. Posons $\zeta = x + iy$ et, pour abréger,

(12) $$\lambda = (2r+1)\pi.$$

Le contour C_r sera formé par les lignes

$$x = \lambda, \qquad y = \lambda, \qquad x = -\lambda, \qquad y = -\lambda.$$

Si $\zeta = x + iy$ parcourt le contour C_r, le point $\frac{\zeta}{\lambda}$ décrit le contour du carré dont les côtés sont

(13) $$x = 1, \qquad y = 1, \qquad x = -1, \qquad y = -1.$$

Ainsi nous aurons, en désignant par U ce dernier contour,

$$\psi_{n,r}(z) = \frac{\underline{|n}}{\lambda^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{e^{\lambda z\zeta}-1}{e^{\lambda\zeta}-1}\,\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}.$$

Déterminons maintenant la quantité positive ρ supérieure à l'unité de manière que l'on ait

$$\rho > |e^{z\zeta\pi}|$$

pour toutes les valeurs de z situées dans la région R et pour celles de ζ qui appartiennent au contour U d'intégration. Nous aurons évidemment

$$|e^{\lambda z\zeta} - 1| \leqq |e^{z\zeta\pi}|^{2r+1} + 1 < 2\rho^{2r+1}.$$

Le long des côtés (13) du contour U les valeurs absolues de $e^{\lambda\zeta} - 1$ sont respectivement supérieures ou égales à

$$e^{\lambda} - 1\,,\quad 1 + e^{-\lambda}\,,\quad 1 - e^{-\lambda}\,,\quad 1 + e^{-\lambda}.$$

Il en résulte qu'on aura constamment sur le chemin d'intégration

$$|e^{\lambda\zeta} - 1| \geqq 1 - e^{-\lambda} \geqq 1 - e^{-\pi} > \frac{1}{2}.$$

Enfin, le module de ζ étant supérieur à l'unité le long de U, nous trouvons

$$|\psi_{n,r}(z)| < \frac{\underline{|n}}{\lambda^n}\cdot\frac{1}{2\pi}\,4\rho^{2r+1}\int_U |d\zeta| = \frac{16\rho}{\pi}\,\frac{\underline{|n}}{(2r+1)^n}\,\frac{\rho^{2r}}{\pi^n},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ceci posé, soit

$$(14)\qquad G(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

une fonction entière quelconque; formons la série

$$(15)\qquad F(z) = a_0(\varphi_0(z) - \pi_{0,0}(z)) + a_1(\varphi_1(z) - \pi_{1,1}(z)) + \ldots$$
$$+ a_n(\varphi_n(z) - \pi_{n,n}(z)) + \ldots,$$

qui satisfait, comme nous l'avons déjà remarqué, formellement à l'équation

$$F(z+1) - F(z) = G(z).$$

Je dis que la série (15) converge absolument et uniformément dans toute région finie R. En effet, $\varphi_n(z) - \pi_{n,n}(z)$ étant égal à $\psi_{n,n}(z)$, le terme général de la série (15) est, en valeur absolue, inférieur à

$$\frac{16\rho}{\pi}\,|a_n|\,\frac{\underline{|n}}{(2n+1)^n}\left(\frac{\rho^2}{\pi}\right)^n$$

pour une valeur quelconque de z appartenant à la région R. Il suffira donc de faire voir que la série

$$(16)\qquad \sum_0^\infty |a_n|\,\frac{\underline{|n}}{(2n+1)^n}\,z^n$$

converge pour $z = \frac{\rho^2}{\pi}$. Or cette série converge dans tout le plan. En effet, pour qu'une série entière soit toujours convergente il faut et il suffit que la racine $n^{\text{ième}}$ du coefficient $n^{\text{ième}}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Cela découle immédiatement du théorème de M. HADAMARD sur le rayon du cercle de convergence d'une série entière. Maintenant, $\sum_0^\infty a_n z^n$ étant d'après l'hypothèse toujours convergente, on a

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0.$$

De plus la formule de STIRLING

$$\underline{|n} = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n+\frac{\theta}{12n}}, \qquad (0 < \theta < 1)$$

donne aisément

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{\underline{|n}}{(2n+1)^n}} = \frac{1}{2e}.$$

Par conséquent la racine $n^{\text{ième}}$ de $|a_n| \frac{\underline{|n}}{(2n+1)^n}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; donc la série (16) est toujours convergente.

Ainsi la série (15) définit bien une fonction entière $F(z)$ satisfaisant à l'équation $F(z+1) - F(z) = G(z)$. Résumons ce résultat de la manière suivante:

Soit

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n z^n$$

une fonction entière quelconque. Désignons par $\varphi_n(z)$ la fonction de Bernoulli et par $\pi_{n,r}(z)$ la fonction rationnelle entière de $e^{2\pi i z}$ et $e^{-2\pi i z}$ définie par l'équation

$$\pi_{n,r}(z) = \underline{|n} \sum \frac{1 - e^{2k\pi i z}}{(2k\pi i)^{n+1}}. \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm r)$$

Alors, les indices r étant choisis d'une manière convenable, la série

$$F(z) = \sum_{n}{}' a_n[\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)]$$

converge uniformément dans toute région finie du plan et représente par conséquent une fonction entière satisfaisant à l'équation

$$F(z+1) - F(z) = G(z).$$

On peut, d'après l'analyse précédente, prendre $r = n$, quelle que soit la fonction $G(z)$. Dans quelles conditions est-il possible de prendre pour l'indice r une valeur constante, ne variant pas avec l'indice n? C'est une question qui — comme la question analogue dans le théorème de M. Mittag-Leffler — se présente naturellement et que je vais aborder dans les lignes qui suivent.

Soit

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n z^n$$

une fonction entière et posons

$$(17)\qquad F(z) = a_0[\varphi_0(z) - \pi_{0,r}(z)] + a_1[\varphi_1(z) - \pi_{1,r}(z)] + \cdots$$
$$+ a_n[\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)] + \cdots.$$

Je dis que la condition nécessaire est suffisante pour que l'on puisse donner à l'indice r une valeur telle que la série (17) converge uniformément dans toute région finie du plan est que le rayon du cercle de convergence de la série

$$(18)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\underline{n}\, a_n z^n$$

ne s'évanouisse pas.

En premier lieu je vais démontrer que c'est une condition nécessaire.

Supposons que la série (17) soit uniformément convergente dans une région contenant les valeurs réelles de z satisfaisant à la condition $0 \leqq z \leqq 1$ (ce qui a certainement lieu, si la série (17) est uniformément convergente dans toute région finie du plan). Alors la fonction $F(z)$ représentée par la série (17) est une fonction continue dans l'intervalle $0 \leqq z \leqq 1$ et peut être développée d'après le théorème de FOURIER suivant les sinus et cosinus des multiples de $2\pi z$. Pour plus de simplicité introduisons la fonction exponentielle au lieu des fonctions trigonométriques et posons

$$(19)\quad F(z) = \frac{1}{2}\alpha_0 + (\alpha_1 e^{2\pi i z} + \alpha_{-1} e^{-2\pi i z}) + \ldots + (\alpha_k e^{2k\pi i z} + \alpha_{-k} e^{-2k\pi i z}) + \cdots,$$

où les coefficients α_k sont à déterminer d'après la formule

$$(20)\qquad \alpha_k = \int_0^1 F(z) e^{-2k\pi i z} dz. \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

Or la série (17) étant uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leqq z \leqq 1$, nous obtenons l'intégrale (20) en intégrant terme à terme la série (17) après l'avoir multipliée par $e^{-2k\pi i z}$. Supposons $|k| > 0$; alors l'équation (8) nous donne:

$$\int_0^1 [\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)] e^{-2k\pi i z} dz = \frac{|\underline{n}}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta - 2k\pi i)}$$

L'intégrale s'annule pour $|k| \leqq r$, puisque la fonction $\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta - 2k\pi i)}$, holomorphe en dehors de C_r, devient infiniment petite d'un ordre supérieur à 1 pour $\zeta = \infty$.

Si $|k| > r$ la valeur de l'intégrale est

$$-\frac{\underline{|n}}{(2k\pi i)^{n+1}},$$

la fonction $\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta - 2k\pi i)}$ ayant alors en dehors de C_r le pôle $\zeta = 2k\pi i$.

Ainsi nous aurons

$$\alpha_{-1} = \alpha_{-2} = \ldots = \alpha_{-r} = 0,$$

et, pour $|k| > r$,

$$\alpha_k = -\sum_{n=0}^{\infty}{}' \underline{|n}\, a_n \frac{1}{(2k\pi i)^{n+1}}. \tag{21}$$

Il en résulte que la série (18) est convergente pour $|z| < \frac{1}{2\pi(r+1)}$. De plus nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Si la série

$$F(z) = a_0[\varphi_0(z) - \pi_{0,r}(z)] + a_1[\varphi_1(z) - \pi_{1,r}(z)] + \ldots + a_n[\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)] + \ldots \tag{22}$$

est uniformément convergente dans une région contenant l'intervalle réel $0 \leqq z \leqq 1$, *la série*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \underline{|n}\, a_n \frac{1}{(2\pi i z)^{n+1}} \tag{23}$$

sera convergente pour $z = \pm(r+1)$ *et par conséquent pour* $|z| > r + 1$. *En outre le développement de Fourier pour* $F(z)$ *dans l'intervalle* $0 < z < 1$ *sera*

$$F(z) = \frac{1}{2}\alpha_0 - \sum_{n=r+1}^{\infty}{}' \{g(n)e^{2n\pi i z} + g(-n)e^{-2n\pi i z}\}. \tag{24}$$

La valeur de α_0 peut être déterminée par l'intégrale (20), ou, ce qui est plus commode, de la manière suivante. La série de Fourier

pour $z = 0$ donne la valeur $\frac{1}{2}(F(0) + F(1))$. Or cette valeur d'après (22) est égal à $\frac{1}{2}\alpha_0$ puisque les fonctions $\varphi_n(z)$ et $\pi_{n,r}(z)$ sont, à l'exception de $\varphi_0(z) = z$, nulles pour $z = 0$ et $z = 1$. Ainsi nous avons pour α_0 l'équation

$$\text{(25)} \qquad \frac{1}{2}\alpha_0 = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=r+1}^{\infty} \{g(n) + g(-n)\}.$$

Maintenant supposons inversement, que,

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

étant une fonction entière, la série (18) ait un rayon de convergence différent de zéro. Alors la série

$$\text{(26)} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{|n}\, a_n \frac{1}{(2\pi i z)^{n+1}}$$

converge pour $|z| > l$, l étant un nombre positif fini. Désignons par $r + 1$ le premier nombre entier positif supérieur à l. Je dis que la série

$$\text{(27)} \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)]$$

est uniformément convergente dans toute région finie du plan.

Pour le démontrer appliquons la formule (8), que nous transformons d'abord pour simplifier l'écriture en substituant $2\pi i\zeta$ à ζ. Ainsi nous avons

$$\text{(28)} \qquad \varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z) = \int \frac{e^{2\pi i z\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} \frac{\underline{|n}}{(2\pi i\zeta)^{n+1}} d\zeta.$$

Nous prenons comme contour de l'intégration un cercle dont le centre est à l'origine et dont le rayon est compris entre l et $r + 1$. Cela posé, la somme des n premiers termes de la série (27) sera égale à

$$S_n(z) = \int \frac{e^{2\pi i z\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} g_n(\zeta) d\zeta.$$

$g_n(z)$ désignant la somme des n premiers terme de la série (26). Mais

celle-ci étant uniformément convergente le long du contour d'intégration, il est évident que pour $n = \infty$ $S_n(z)$ tend uniformément dans toute région finie du plan des z, vers l'intégrale

$$\int \frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} g(\zeta) d\zeta.$$

Ainsi nous obtenons la proposition suivante:

Supposons que,

(29) $$G(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

étant une fonction entière, la série

(30) $$g(z) = a_0 \frac{1}{2\pi iz} + a_1 \frac{1}{(2\pi iz)^2} + \ldots + \underline{|n}\, a_n \frac{1}{(2\pi iz)^{n+1}} + \ldots$$

soit convergente pour $|z| > l$. *Soit de plus* $r + 1$ *le premier nombre entier positif supérieur à* l. *Alors la série*

(31) $$F(z) = a_0[\varphi_0(z) - \pi_{0,r}(z)] + a_1[\varphi_1(z) - \pi_{1,r}(z)] + \ldots$$
$$+ a_n[\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)] + \ldots$$

est uniformément convergente dans toute région finie du plan et représente par conséquent une fonction entière satisfaisant à l'équation $F(z+1) - F(z) = G(z)$. *En outre on a*

(32) $$F(z) = \int \frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} g(\zeta) d\zeta,$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle dont le centre est à l'origine et dont le rayon est compris entre l *et* $r + 1$.

Le développement en série de Fourier de la fonction $F(z)$ est donné par les équations (24) et (25).

Ajoutons encore quelques remarques qui se rattachent aux théorèmes démontrés. La dérivée $F'(z)$ d'une fonction $F(z)$ vérifiant l'équation $F(z + 1) - F(z) = G(z)$ sera évidemment une solution de l'équation

(33) $$F'(z + 1) - F'(z) = G'(z).$$

Ainsi nous pouvons résoudre la dernière équation de deux manières différentes: soit directement en appliquant les résultats précédents, soit indirectement en résolvant l'équation $F(z+1)-F(z)=G(z)$ et prenant alors la dérivée de la solution trouvée. Je distinguerai les deux solutions de l'équation (33) ainsi obtenues comme première et deuxième solution. Elles ne peuvent différer que par une fonction entière ayant la période 1. Il s'agit de déterminer celle-ci. Pour plus de simplicité je me place dans le cas du dernier théorème. Ainsi je suppose que la fonction $F(z)$ soit représentée par l'intégrale (32). Alors la deuxième solution de l'équation (33) sera

$$F'(z) = \int \frac{e^{2\pi i z\zeta}}{e^{2\pi i\zeta}-1}\, 2\pi i\zeta g(\zeta)\,d\zeta. \tag{34}$$

Pour avoir la première solution, que je nommerai $F_1(z)$, il faut former la fonction $g_1(z)$ qui dépend de

$$G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$$

de la même manière que $g(z)$ dépend de $G(z)$. Or on trouve

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |\underline{n}\,(n+1)a_{n+1}\frac{1}{(2\pi i z)^{n+1}},$$

d'où résulte

$$g_1(z) = 2\pi i z g(z) - a_0. \tag{35}$$

Par conséquent nous avons

$$F_1(z) = \int \frac{e^{2\pi i z\zeta}-1}{e^{2\pi i\zeta}-1}(2\pi i\zeta g(\zeta)-a_0)\,d\zeta. \tag{36}$$

puis, en comparant (34) et (36),

$$F'(z) = F_1(z) + a_0\int \frac{e^{2\pi i z\zeta}-1}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta + \int \frac{2\pi i\zeta g(\zeta)}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta.$$

Ici la deuxième intégrale est une simple constante et la première s'obtient par le théorème de Cauchy. Il vient ainsi définitivement

$$F'(z) = F_1(z) + a_0\sum_{k=-r}^{+r}(e^{2\pi i k z}-1) + \int \frac{2\pi i\zeta g(\zeta)}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta. \tag{37}$$

Passons à une autre remarque. Soit $g(z)$ une fonction quelconque holomorphe pour $|z| \geqq l$ et s'annulant pour $z = \infty$. Désignons par $r+1$ le premier nombre entier positif supérieur à l et formons la série

$$(38) \qquad \sum_{n=r+1}^{\infty} (g(n)e^{2n\pi iz} + g(-n)e^{-2n\pi iz}). \qquad (0<z<1)$$

Je dis que cette série est convergente et représente une fonction entière de z. En effet, soit pour $|z| \geqq l$

$$g(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^{n+1}} + \ldots.$$

Alors l'intégrale

$$G(z) = \int e^{2\pi i\zeta z} g(\zeta) d\zeta$$

prise le long du cercle $|\zeta| = l$ représente une fonction entière de z, dont le développement suivant les puissances de z sera

$$G(z) = 2\pi i\left[c_0 + c_1(2\pi iz) + \ldots + \frac{c_n}{|\underline{n}}(2\pi iz)^n + \ldots\right],$$

puisque l'intégrale considérée se réduit au résidu de là fonction $e^{2\pi iz\zeta}g(\zeta)$ par rapport au point $\zeta = \infty$. Or en appliquant nos théorèmes à cette fonction $G(z)$ nous voyons que la série (38) est identique à une constante près au développement en série de Fourier de la fonction entière

$$-F(z) = -\int \frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} g(\zeta) d\zeta,$$

l'intégrale étant prise le long du cercle $|\zeta| = l$.

Maintenant je vais appliquer les théorèmes généraux à quelques exemples. Soit d'abord

$$G(z) = 2\pi i e^{2\pi ixz} = \sum_{n=0}^{\infty} (2\pi i)^{n+1} \frac{x^n}{|\underline{n}} z^n,$$

où nous supposons pour éviter des discussions particulières que la con-

stante x, d'ailleurs arbitraire, ne soit pas un nombre entier. La série $g(z)$ devient

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z^{n+1}}.$$

Elle est convergente et égale à $\frac{1}{z - x}$ pour les valeurs de z satisfaisant à la condition $|z| > |x|$.

Nous avons donc

$$(39) \qquad F(z) = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i x)^n}{\underline{|n}} [\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)],$$

r étant le plus grand nombre entier contenu dans $|x|$. De plus la fonction $F(z)$ est représentée par l'intégrale

$$\int \frac{e^{2\pi i\zeta z} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} \frac{d\zeta}{\zeta - x}$$

prise le long du cercle $|\zeta| = l$, où l désigne une quantité positive comprise entre $|x|$ et $r + 1$. Le théorème de Cauchy nous donne l'expression explicite de $F(z)$, savoir

$$(40) \qquad F(z) = 2\pi i \frac{e^{2\pi i x z} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} + \sum_{k=-r}^{k=+r} (e^{2\pi i k z} - 1) \frac{1}{k - x}.$$

En égalant les deux expressions (39) et (40) de $F(z)$, nous trouvons

$$(41) \qquad \frac{e^{2\pi i x z} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-r}^{k=+r} (1 - e^{2\pi i k z}) \frac{1}{k - x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i x)^n}{\underline{|n}} [\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)],$$

équation valable pour toute valeur finie de z et toute valeur de x satisfaisant à l'inégalité $|x| < r + 1$.

Enfin, le développement en série de Fourier de $F(z)$ s'obtient d'après les formules (24) et (25)

$$F(z) = \pi i + \sum_{k=r+1}^{\infty} \left\{ (e^{2\pi i k z} - 1) \frac{1}{x - k} + (e^{-2\pi i k z} - 1) \frac{1}{x + k} \right\}$$

et l'on trouve ainsi l'équation connue

$$(42)\qquad 2\pi i\,\frac{e^{2\pi i z x}-1}{e^{2\pi i x}-1}=\pi i+\sum_{k=1}^{\infty}{}'\left\{(e^{2\pi i k z}-1)\frac{1}{x-k}+(e^{-2\pi i k z}-1)\frac{1}{x+k}\right\}.\qquad (0<z<1)$$

On en déduit aisément la suivante

$$(43)\qquad 2\pi i\left[\frac{e^{2\pi i z x}-1}{e^{2\pi i x}-1}-z\right]=\sum(e^{2\pi i k z}-1)\left(\frac{1}{x-k}+\frac{1}{k}\right),\qquad \left(\begin{smallmatrix}k=-\infty+\ldots+\infty\\ k=0\ \text{excepté}\end{smallmatrix}\right)$$

dont nous ferons usage dans un instant, et qui présente l'avantage d'être applicable dans l'intervalle $0\leqq z\leqq 1$. La série du second membre est en outre absolument convergente.

Considérons un deuxième exemple. Prenons cette fois

$$G(z)=\frac{e^{2\pi i z}-1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^{n+1}}{|\!\underline{\,n+1\,}}z^n.$$

Nous trouvons

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'\frac{1}{n+1}\frac{1}{z^{n+1}},$$

série convergente pour $|z|>1$ et qui a pour somme $\lg\frac{z}{z-1}$.

Donc il vient

$$(44)\qquad F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^{n+1}}{|\!\underline{\,n+1\,}}[\varphi_n(z)-\pi_{n,1}(z)]=\int\frac{e^{2\pi i z\zeta}-1}{e^{2\pi i\zeta}-1}\lg\frac{\zeta}{\zeta-1}\,d\zeta,$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle $|\zeta|=l$, dont le rayon l est compris entre 1 et 2.

Le développement en série de Fourier de $F(z)$ sera d'après (24)

$$(45)\qquad F(z)=\frac{1}{2}\alpha_0-\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\lg\frac{n}{n-1}e^{2\pi i n z}+\lg\frac{n}{n+1}e^{-2\pi i n z}\right\},$$

où la constante α_0 se trouve au moyen de la formule (25)

$$\frac{1}{2}\alpha_0=\pi i+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\lg\frac{n}{n-1}+\lg\frac{n}{n+1}\right\}=\pi i+\lg 2.$$

Remarquons que la fonction

$$(46)\qquad \Psi(z) = (e^{2\pi iz} - 1)\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

est une fonction entière satisfaisant à l'équation

$$\Psi(z+1) - \Psi(z) = \frac{e^{2\pi iz} - 1}{z}.$$

Par conséquent la fonction $F(z)$ ne peut différer de $\Psi(z)$ que par une fonction entière $\varphi(z)$ ayant la période 1. Maintenant je vais déterminer la fonction $\varphi(z)$ et réduire ainsi la fonction $F(z)$ à des fonctions élémentaires.

Dans ce but je reprends l'équation

$$F(z) = \int \frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} \lg \frac{\zeta}{\zeta - 1} d\zeta.$$

La détermination du logarithme qui figure au second membre doit être choisie de façon que le logarithme s'annule pour $\zeta = \infty$. En excluant par une coupure rectiligne les valeurs réelles $0 \leq \zeta \leq 1$ nous pouvons prolonger analytiquement $\lg \frac{\zeta}{\zeta - 1}$ à l'intérieur de la courbe d'intégration. La différence des deux valeurs du logarithme aux deux bords de la coupure sera alors $2\pi i$.

Cela posé, nous remarquons d'abord que la fonction sous le signe d'intégration a le pôle $\zeta = -1$. En prenant le résidu par rapport à ce pôle nous pouvons écrire d'après le théorème de Cauchy

$$(47)\quad F(z) = (1 - e^{-2\pi iz}) \lg 2 + \int \frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} \lg \frac{\zeta}{\zeta - 1} d\zeta = (1 - e^{-2\pi iz}) \lg 2 + J,$$

l'intégrale J s'étendant à un contour entourant la coupure $\zeta = 0 \ldots 1$. Pour pouvoir réduire ce contour aux deux bords de la coupure, il faut transformer d'abord l'intégrale parce que la fonction qui multiplie le logarithme devient infinie pour $\zeta = 1$. C'est pourquoi nous écrivons

$$J = \int \left[\frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} - \frac{e^{2\pi iz} - 1}{2\pi i(\zeta - 1)}\right] \lg \frac{\zeta}{\zeta - 1} d\zeta.$$

Cette transformation est légitime puisque l'intégrale $\int \frac{1}{\zeta - 1} \lg \frac{\zeta}{\zeta - 1} d\zeta$ s'évanouit, la fonction à intégrer étant infiniment petite du deuxième ordre pour $\zeta = \infty$. Maintenant nous faisons tendre le chemin d'intégration vers les deux bords de la coupure $\zeta = 0 \ldots 1$. Ainsi il vient

$$J = \int_0^1 \left(2\pi i \frac{e^{2\pi i z x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} - \frac{e^{2\pi i z} - 1}{x - 1} \right) dx$$

ou encore

$$(48) \qquad F(z) = (1 - e^{-2\pi i z}) \lg 2 + C(e^{2\pi i z} - 1)$$
$$+ 2\pi i \int_0^1 \frac{dx}{e^{2\pi i x} - 1} [e^{2\pi i z x} - 1 - x(e^{2\pi i z} - 1)],$$

où nous avons posé

$$\int_0^1 \left[\frac{2\pi i x}{e^{2\pi i x} - 1} - \frac{1}{x - 1} \right] dx = C.$$

Cela étant, nous décomposons $\frac{F(z)}{e^{2\pi i z} - 1}$ en fractions simples en introduisant dans la formule

$$\frac{F(z)}{e^{2\pi i z} - 1} = e^{-2\pi i z} \lg 2 + C + 2\pi i \int_0^1 \frac{dx}{e^{2\pi i x} - 1} \left[\frac{e^{2\pi i z x} - 1}{e^{2\pi i z} - 1} - x \right]$$

le développement (comparez (43))

$$2\pi i \left[\frac{e^{2\pi i z x} - 1}{e^{2\pi i z} - 1} - x \right] = \sum{}' (e^{2k\pi i x} - 1) \left[\frac{1}{z - k} + \frac{1}{k} \right].$$

De cette manière nous trouvons

$$(49) \qquad \frac{F(z)}{e^{2\pi i z} - 1} = e^{-2\pi i z} \lg 2 + C + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{k} \right).$$

Avant d'introduire ici la fonction $\Gamma(z)$, déterminons la constante C en faisant $z = \frac{1}{2}$ dans les équations (49) et (45). Il vient

$$-\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}\right) = -\lg 2 + C + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2k-1} + \frac{2}{2k}\right) = -3\lg 2 + C,$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\alpha_0 - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \lg\frac{n\,.\,n}{(n-1)(n+1)} = \pi i + \lg 2 - \lg\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\},$$

où nous avons fait usage de la formule de WALLIS. En réduisant nous obtenons

(50) $$C = \int_0^1\left(\frac{2\pi i x}{e^{2\pi i x}-1} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \lg 2\pi - \frac{\pi i}{2}.$$

En remarquant maintenant que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\right) = \frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)} - \Gamma'(1) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \Gamma'(1) + \pi i\frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1},$$

nous trouvons enfin

(51) $$F(z) = (e^{2\pi i z} - 1)\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ désignant la fonction entière périodique

(52) $$\varphi(z) = \pi i + \frac{\pi i}{2}(e^{2\pi i z} + 1) + (1 - e^{-2\pi i z})\lg 2 + (e^{2\pi i z} - 1)(\lg 2\pi - \Gamma'(1)).$$

Les formules que nous venons d'écrire restent vraies si nous remplaçons l'unité imaginaire i par $-i$. Par conséquent en séparant les parties réelles et imaginaires en considérant z comme réel, nous trouvons des résultats restant valables pour toutes les valeurs réelles et complexes de z.

C'est ainsi que les équations (44), (51) et (52) nous donnent le théorème suivant:

Soit $\mathfrak{F}(z)$ la fonction entière définie par l'équation

(53) $$\mathfrak{F}(z) = \sin\pi z\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\pi}{2}\cos\pi z + (\lg 2\pi - \Gamma'(1))\sin\pi z.$$

Nous aurons pour toute valeur finie réelle ou complexe de z les développements

$$(54)\quad \begin{cases} 2\sin\pi z\,\mathfrak{F}(z) \\ = \lg 2.(1-\cos 2\pi z)+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(2\pi)^{2n+2}}{\lfloor 2n+2}\varphi_{2n+1}(z)+\frac{1-\cos 2\pi z}{n+1}\right], \\ 2\cos\pi z\,\mathfrak{F}(z) \\ = -\pi+\lg 2.\sin 2\pi z+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(2\pi)^{2n+1}}{\lfloor 2n+1}\varphi_{2n}(z)+\frac{2\sin 2\pi z}{2n+1}\right]. \end{cases}$$

De l'équation (45) nous déduisons les développements en série de Fourier valables dans l'intervalle réel $0 < z < 1$:

$$(55)\quad \begin{cases} 2\sin\pi z\,\mathfrak{F}(z) = \lg\frac{1}{2}\cos 2\pi z+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\lg\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)\cos 2\pi nz, \\ 2\cos\pi z\,\mathfrak{F}(z) = \lg\frac{1}{2}\sin 2\pi z+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\lg\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\sin 2\pi nz. \end{cases}$$

En ajoutant les équations (55) après les avoir multipliées respectivement par $\sin\pi z$ et $\cos\pi z$ on trouve aisément la belle série de M. Lerch:[1]

$$(56)\qquad \mathfrak{F}(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\lg\left(\frac{n}{n+1}\right)\sin(2n+1)\pi z,$$

laquelle multipliée par $2\sin\pi z$ et $2\cos\pi z$ reproduit les équations (55).

Remarquons encore que l'équation que nous avons trouvé plus haut, savoir

$$2\pi i\int_0^1\frac{dx}{e^{2\pi ix}-1}\left[\frac{e^{2\pi izx}-1}{e^{2\pi iz}-1}-x\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{k}\right),$$

donne après quelques transformations faciles l'expression de la fonction entière $\sin\pi z\dfrac{d\lg\Gamma(z)}{dz}$ sous la forme d'une intégrale définie:

---

[1] *Sur la différentiation d'une classe de séries trigonométriques*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3me série, tome 12. (1895.)

(57)
$$2\sin\pi z \frac{d \lg \Gamma(z)}{dz}$$
$$= 2\Gamma'(1)\sin\pi z - \frac{\sin\pi z}{z} - \pi\cos\pi z + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x\sin\pi z - \pi\sin xz)\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,dx.$$ [1]

On vérifie d'ailleurs aisément cette formule en partant de la relation

$$\frac{\sin xz}{\sin\pi z} - \frac{x}{\pi} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{z-k} - \frac{2}{k}\right)\sin kx,$$

laquelle multipliée par $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,dx$ et intégrée ensuite entre les limites o et π, donne le résultat

(58)
$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin xz}{\sin\pi z} - \frac{x}{\pi}\right)\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k} - \frac{1}{k}\right),$$

qui ne diffère que par sa forme de l'équation (57).

Comme troisième exemple j'ai consideré l'équation

$$F(z+1) - F(z) = \frac{\sin^2\pi z}{z^2}$$

qui est évidemment satisfaite pour

$$F(z) = -\sin^2\pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2}.$$

Mais les calculs étant un peu longs je me contente de transcire ici quelques formules que j'ai obtenues et qui me paraissent dignes d'intérêt.

Ce sont les suivantes:

(59)
$$\sin^2\pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2} = \frac{\pi^2}{2} - \int_0^\pi \frac{\pi - x}{\sin x}\sin(2zx - x)\,dx$$

---

[1] Cette formule (légèrement modifiée) a déjà été indiquée par M. LERCH dans son mémoire intitulé: *Různé výsledky v theorii funkce gamma.* (Rozpravy, Ceské Akademie Cisare Frantiska Josefa, 28. Unora 1896.)

ou encore

$$(59') \qquad \sin^2 \pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{\sin^2 \pi z}{2z^2} - \int_0^{\pi} (\pi - x) \cot x . \sin 2zx dx.$$

Ces relations mettent en évidence que $\sin^2 \pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2}$ est une fonction entière; elles donnent de suite les séries entières de $2z - 1$ et de z, représentant cette fonction dans tout le plan. Ainsi l'équation (59) donne

$$(60) \qquad \sin^2 \pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - c_1(2z - 1) + c_2 \frac{(2z - 1)^3}{\underline{|3}} - + \ldots \pm c_n \frac{(2z - 1)^{2n-1}}{\underline{|2n - 1}} + \ldots,$$

où nous avons posé pour abréger

$$c_n = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{\sin x} x^{2n-1} dx.$$

On déduit aussi très aisément de l'équation (59) les coefficients de la série de Fourier représentant la fonction $\sin^2 \pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2}$ dans l'intervalle $0 < z < 1$. Voici cette série

$$(61) \quad \sin^2 \pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2} = \frac{\pi^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left((n - 1) \lg \frac{n - 1}{n} + (n + 1) \lg \frac{n + 1}{n} \right) \sin 2n\pi z,$$

où il faut remplacer $(n - 1) \lg \frac{n - 1}{n}$ par zéro pour $n = 1$.

Revenons maintenant au cas général. L'équation

$$F(z + 1) - F(z) = G(z)$$

est contenue comme cas particulier dans l'équation

$$(62) \qquad F(z + 1) - aF(z) = G(z),$$

a désignant une constante donnée, ou dans l'équation plus générale encore

$$(63) \quad a_0 F(z + n) + a_1 F(z + n - 1) + \ldots + a_{n-1} F(z + 1) + a_n F(z) = G(z),$$

$a_0, a_1, \ldots a_n$ étant des constantes données. On peut réduire ces équations comme le fait M. GUICHARD, à l'équation $F(z+1) - F(z) = G(z)$. Mais on peut aussi les traiter directement d'une manière entièrement analogue à celle que nous avons employée plus haut pour l'équation $F(z+1) - F(z) = G(z)$.

Pour plus de simplicité considérons seulement l'équation (62)

$$F(z+1) - aF(z) = G(z),$$

où nous supposerons a différent de 0 et de 1.

En premier lieu nous cherchons les fonctions rationnelles entières $\varphi_n(z)$ satisfaisant à l'équation

$$\varphi_n(z+1) - a\varphi_n(z) = z^n. \tag{64}$$

Remarquant que

$$e^{\zeta(z+1)} - ae^{\zeta z} = e^{\zeta z}(e^{\zeta} - a),$$

nous voyons que ce sont les coefficients du développement de $\dfrac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} - a}$ suivant les puissances croissantes de ζ, qui fournissent les fonctions $\varphi_n(z)$.[1]

Ainsi nous avons

$$\frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} - a} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) \frac{\zeta^n}{\lfloor n}. \tag{65}$$

et par conséquent

$$\varphi_n(z) = \frac{\lfloor n}{2\pi i} \int \frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} - a} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \tag{66}$$

l'intégrale étant prise autour du point $\zeta = 0$ (le contour d'intégration ne contenant à son intérieur aucune des racines de l'équation $e^{\zeta} - a = 0$).

Maintenant considérons l'intégrale

$$\psi_n(z) = \frac{\lfloor n}{2\pi i} \int \frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} - a} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \tag{67}$$

prise le long d'un chemin entourant outre le point $\zeta = 0$ un certain

[1] Ce sont les fonctions considérées par M. HERMITE dans ses intéressantes recherches sur les polynômes de BERNOULLI. Voir: SONIN et HERMITE, *Sur les polynômes de Bernoulli*, Journal de Crelle, tome 116, p. 133.

nombre de racines de l'équation $e^{\zeta} - a = 0$. L'équation (64) est encore satisfaite si nous remplaçons $\varphi_n(z)$ par $\psi_n(z)$. De plus $\psi_n(z)$ ne diffère de la fonction $\varphi_n(z)$ que par un certain nombre de termes de la forme

$$-\frac{|\underline{n}}{a}\,\frac{1}{(\lg a + 2k\pi i)^{n+1}}\,e^{(\lg a + 2k\pi i)z} \qquad (k \text{ entier}). \tag{68}$$

qui sont les résidus provenant des racines de l'équation $e^{\zeta} - a = 0$ qui se trouvent à l'intérieur du contour d'intégration. Ainsi nous avons

$$\psi_n(z) = \varphi_n(z) - \pi_n(z), \tag{69}$$

$\pi_n(z)$ désignant une somme de fonctions exponentielles de la forme (68).

Cela posé, je passe à la solution de l'équation

$$F(z+1) - aF(z) = G(z), \tag{70}$$

où je suppose que la fonction donnée

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{71}$$

est une fonction entière. On démontre, comme nous l'avons fait plus haut dans le cas $a = 1$, qu'il est toujours possible de choisir les intégrales $\psi_n(z)$ de façon que la série

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[\varphi_n(z) - \pi_n(z)] \tag{72}$$

converge uniformément dans toute région finie du plan et représente par conséquent une fonction entière satisfaisant à l'équation (70).

Remarquons qu'en général il faut faire varier le chemin d'intégration de l'intégrale $\psi_n(z)$ avec l'indice n et c'est ainsi que le nombre des termes exponentiels dont se compose $\pi_n(z)$ croit indéfiniment en même temps que l'indice n. L'unique cas où il suffit de prendre un chemin d'intégration fixe, c'est à dire indépendant de n, est celui où le rayon du cercle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\underline{n}\, a_n z^n$ ne s'évanouit pas.

Plaçons-nous dans ce cas et supposons que la série

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |\underline{n}\, a_n z^{n+1} \tag{73}$$

soit convergente pour $|z| > l$. Désignons de plus par C un cercle, dont le centre est à l'origine, dont le rayon est supérieur à l et qui n'a sur sa périphérie aucune racine de l'équation $e^{z} - a = 0$.

Alors nous pourrons prendre l'intégrale $\psi_n(z)$ le long du cercle C et la fonction $F(z)$ se présentera sous la forme

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} - a}\, g(\zeta)\, d\zeta. \tag{74}$$

Prenons pour exemple $a = -1$ et $G(z) = -\frac{\sin \pi z}{z}$, de sorte que l'équation à résoudre devient

$$F(z+1) + F(z) = -\frac{\sin \pi z}{z}. \tag{75}$$

Elle est évidemment satisfaite par la fonction entière $\sin \pi z \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$.

Désignons avec M. Hermite les fonctions $\varphi_n(z)$ correspondant à la constante $a = -1$ par $\chi_n(z)$, de sorte que

$$\frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z) \frac{\zeta^n}{n!}. \tag{76}$$

La fonction $G(z)$ étant égale à

$$-\frac{\sin \pi z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \pi^{2n+1} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

nous aurons

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}}. \tag{77}$$

Cette série est convergente pour $|z| > \pi$ et pour ces valeurs de z sa somme est égale à $\frac{1}{2i} \lg \frac{z - \pi i}{z + \pi i}$. Ainsi nous aurons d'après (74)

$$F(z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{C} \frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} + 1} \lg \frac{\zeta + \pi i}{\zeta - \pi i}\, d\zeta. \tag{78}$$

l'intégrale étant prise le long du cercle $|\zeta| = l$, où l est compris entre π et 2π.

En transformant cette intégrale d'une manière semblable à celle que nous avons employée plus haut pour l'intégrale (44), on reconnaît que la fonction $F(z)$ est identique à la fonction $\mathfrak{F}(z)$ définie par l'équation (53). Ainsi notre analyse nous donne comme solution de l'équation (75) la fonction

(79) $$F(z) = \sin \pi z \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\pi}{2} \cos \pi z + (\lg 2\pi - \Gamma'(1)) \sin \pi z.$$

Le développement de cette fonction suivant les polynômes $\chi_n(z)$ sera d'après (72)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+1}}{\lfloor 2n+1} \psi_{2n}(z),$$

ou, puisque l'on a

$$\psi_{2n}(z) = \frac{\lfloor 2n}{2\pi i} \int \frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} + 1} \frac{d\zeta}{\zeta^{2n+1}} = \chi_{2n}(z) + 2 \frac{\lfloor 2n}{\pi^{2n+1}} (-1)^{n+1} \sin \pi z,$$

(80) $$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+1}}{\lfloor 2n+1} \chi_{2n}(z) + \frac{2 \sin \pi z}{2n+1} \right].$$

Considérons encore l'équation

(81) $$F(z+1) - F(z) = \Phi(z),$$

la fonction donnée $\Phi(z)$ étant supposée méromorphe dans toute région finie du plan. Je vais démontrer que *l'équation admet toujours une solution $F(z)$ elle-même méromorphe dans toute région finie du plan.* Commençons par le cas spécial où il y a une droite verticale (c'est à dire parallèle à l'axe des quantités purement imaginaires) telle que tous les pôles de $\Phi(z)$ soient à gauche de cette droite. Je dis que l'on peut déterminer les fonctions entières rationnelles $g_0(z), g_1(z), \ldots$ de telle façon que la série

(82) $$\mathrm{F}_1(z) = \{g_0(z) - \Phi(z)\} + \{g_1(z) - \Phi(z+1)\} + \ldots + \{g_n(z) - \Phi(z+n)\} + \ldots$$

représente une fonction méromorphe dans toute région finie du plan.

En effet, les parties réelles des pôles de $\Phi(z)$ étant inférieures à un certain nombre ρ, celles des pôles de $\Phi(z+n)$ seront inférieures à $\rho - n$. Soit k le plus petit nombre entier positif tel que $\rho - k$ est négatif: nous prendrons

$$g_0(z) = g_1(z) = \ldots = g_{k-1}(z) = 0.$$

Désignons maintenant par $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots$ des quantités positives assujetties à la seule condition que la série

$$\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2} + \cdots$$

soit convergente. La fonction $\Phi(z+n)$, où $n \geq k$, est holomorphe dans un cercle dont le centre est à l'origine et dont le rayon est certainement supérieur à $n - \rho$. Par conséquent nous aurons

$$\Phi(z+n) = \mathfrak{P}_n(z),$$

$\mathfrak{P}_n(z)$ désignant une série entière uniformément convergente pour les valeurs de z satisfaisant à la condition $|z| \leq n - \rho$. Cela posé, nous prendrons pour $g_n(z)$ un certain nombre de termes de la série $\mathfrak{P}_n(z)$ en disposant du nombre de ces termes de façon que l'inégalité

$$(83) \qquad |\Phi(z+n) - g_n(z)| < \varepsilon_n$$

ait lieu pour toute valeur de z, dont le module est inférieur à $n - \rho$. Soit maintenant R une région finie quelconque du plan. Comme la quantité $n - \rho$ croit indéfiniment avec n il est évident qu'à partir d'un certain indice n, soit à partir de $n = r$, l'inégalité (83) est satisfaite pour toute valeur de z appartenant à la région R. Donc la série

$$\{g_r(z) - \Phi(z+r)\} + \{g_{r+1}(z) - \Phi(z+r+1)\} + \cdots$$

est absolument et uniformément convergente dans la région R, d'où il suit que la série (82) représente une fonction méromorphe dans toute région finie du plan.

Maintenant la fonction $F_1(z)$ satisfait évidemment à l'équation

$$F_1(z+1) - F_1(z) = \Phi(z) - g_0(z) + \{g_0(z+1) - g_1(z)\} + \{g_1(z+1) - g_2(z)\} + \cdots$$

c'est à dire à une équation de la forme

$$F_1(z+1) - F_1(z) = \Phi(z) + G(z).$$

$G(z)$ désignant une fonction entière. Soit $E(z)$ une fonction entière qui vérifie l'équation

$$E(z+1) - E(z) = G(z).$$

Alors la fonction

$$F(z) = F_1(z) - E(z)$$

sera une solution méromorphe de l'équation (81).

Remarquons encore que nous pouvons représenter $F(z)$ par une série de la même forme que $F_1(z)$, puisque $E(z)$ peut être développée (d'une infinité de manières) en une série toujours convergente procédant suivant des fonctions entières rationnelles. Ainsi dans le cas qui nous occupe l'équation (81) admet une solution méromorphe représentée par une série de la forme

$$(84) \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{g_n(z) - \Phi(z+n)\},$$

les $g_n(z)$ étant des fonctions entières rationnelles.

Considérons maintenant le cas où les pôles de la fonction donnée $\Phi(z)$ sont tous situés à droite d'une certaine droite verticale. Nous pouvons procéder d'une manière analogue et démontrer ainsi qu'il existe une solution méromorphe de l'équation (81) représentée par une série de la forme

$$(85) \qquad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\Phi(z-n) - h_n(z)\},$$

les $h_n(z)$ étant des fonctions entières rationnelles. D'ailleurs on ramène ce cas au cas précédent en remarquant que la fonction $-F(1-z)$ sera une solution de l'équation (81) si la fonction $F(z)$ vérifie l'équation $F(z+1) - F(z) = \Phi(-z)$.

Passons enfin au cas général. $\Phi(z)$ étant une fonction méromorphe donnée quelconque nous prenons à volonté une droite verticale et distribuons les pôles de $\Phi(z)$ en deux groupes, contenant l'un tous les pôles situés à droite, l'autre tous les pôles situés à gauche de la droite verticale. Les pôles situés sur cette droite peuvent être repartis à volonté dans l'un ou l'autre des groupes. D'après le théorème de M. Mittag-Leffler il est toujours possible de décomposer $\Phi(z)$ en deux fonctions $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$

$$(86) \qquad \Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z),$$

de façon que les pôles de $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ coïncident respectivement avec les pôles de $\Phi(z)$ appartenant au premier ou au deuxième groupe.

Maintenant déterminons les fonctions méromorphes

$$(87)\qquad F_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\Phi_1(z-n) - h_n(z)\}, \qquad F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{g_n(z) - \Phi_2(z+n)\}$$

telles que

$$(88)\qquad F_1(z+1) - F_1(z) = \Phi_1(z), \qquad F_2(z+1) - F_2(z) = \Phi_2(z).$$

Alors la fonction

$$(89)\qquad F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

satisfera à l'équation (81). Ainsi notre théorème se trouve complètement démontré.

Remarquons encore que l'on peut construire d'une autre manière une solution méromorphe de l'équation (81) dans le cas special où il existe une fonction entière $H(z)$ ayant la période 1 et admettant tout pôle de $\Phi(z)$ d'ordre n comme zéro d'un ordre $\geqq n$. En effet, dans ce cas $H(z)\Phi(z)$ sera une fonction entière et, en désignant par $\Psi(z)$ une fonction entière satisfaisant à l'équation $\Psi(z+1) - \Psi(z) = H(z)\Phi(z)$, la fonction méromorphe $F(z) = \frac{\Psi(z)}{H(z)}$ sera une solution de l'équation $F(z+1) - F(z) = \Phi(z)$.

Considérons maintenant le cas où tous les pôles de la fonction donnée $\Phi(z)$ sont du premier ordre, les résidus des pôles étant en outre des nombres entiers positifs ou négatifs. Alors la fonction $F(z)$ définie par l'équation (89) sera une fonction méromorphe de même espèce que $\Phi(z)$. Or toute fonction de cette espèce est la dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe et réciproquement. Donc l'équation $\frac{F'(z+1)}{F(z+1)} - \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$, $\Phi(z)$ désignant une fonction méromorphe donnée quelconque, admet une solution $F(z)$ elle-même méromorphe.

L'intégration nous conduit à la proposition suivante:

Si $\Phi(z)$ est une fonction méromorphe quelconque, il existe toujours une fonction méromorphe $F(z)$ telle que

$$(90)\qquad \frac{F(z+1)}{F(z)} = \Phi(z).$$

La solution la plus générale de cette équation sera évidemment $F(z)H(z)$, où $H(z)$ désigne une fonction arbitraire admettant la période 1.

M. Guichard s'est occupé de la même équation (90) en supposant que $\Phi(z)$ est une fonction entière. Il a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction entière $F(z)$ vérifiant l'équation (90) consiste en ce que les zéros de $\Phi(z)$ soient tous situés à gauche d'une droite verticale (et non à »droite» comme cela est imprimé, par erreur sans doute, dans le mémoire de M. Guichard).

Démontrons, pour finir, que l'équation

$$(91) \qquad \varphi_1(z)F(z+1) + \varphi_0(z)F(z) = \varphi(z),$$

$\varphi(z)$, $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ désignant des fonctions méromorphes données, admet toujours une solution $F(z)$ elle-même méromorphe.

En effet, d'après ce qui précède, nous pourrons déterminer la fonction méromorphe $F_1(z)$ telle que

$$(92) \qquad \frac{F_1(z+1)}{F_1(z)} = -\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_0(z)}.$$

Alors l'équation à résoudre peut s'écrire ainsi:

$$(93) \qquad F_1(z+1)F(z+1) - F_1(z)F(z) = -\frac{\varphi(z)F_1(z)}{\varphi_0(z)}.$$

Donc en désignant par $F_2(z)$ une fonction méromorphe vérifiant l'équation

$$(94) \qquad F_2(z+1) - F_2(z) = -\frac{\varphi(z)F_1(z)}{\varphi_0(z)},$$

il est évident que la fonction

$$(95) \qquad F(z) = \frac{F_2(z)}{F_1(z)}$$

sera une solution méromorphe de l'équation (91).

Zürich, 14 juillet 1896.

Je profite de cette occasion pour ajouter à mon mémoire »Über die Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante» (Tome 19 de ce journal) une citation que je dois à l'obligeance de M. Frobenius. L'idée de déterminer les sommes de signes de Legendre par les résidus des coefficients dans le développement de fonctions élémentaires se trouve déjà dans le grand mémoire de Cauchy »Sur la théorie des nombres». (Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, 1840, tome 17.)

SUR LA POLARISATION PAR DIFFRACTION

(Seconde partie)

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS

VII.

Je reprends, après un assez long intervalle, mon mémoire sur la polarisation par diffraction.[1] Depuis, ce problème a été l'objet d'un travail très important de M. SOMMERFELD, qui a paru dans les Mathematische Annalen, et dans lequel cet auteur retrouve et complète mes résultats par une méthode extrêmement ingénieuse. J'aurai donc, dans ce qui va suivre, non seulement à compléter les résultats précédemment obtenus, mais à les comparer à ceux de M. SOMMERFELD.

Je vais examiner dans ce paragraphe ce qui arrive quand j'abandonne la 4e hypothèse énoncée dans la première partie de ce travail (page 305) à la fin du § II; c'est à dire quand je ne suppose plus que la lentille ait une ligne focale coïncidant exactement avec le bord du biseau.

Conservons d'ailleurs les autres hypothèses, et imaginons que l'angle du biseau soit infiniment petit et que l'écran soit parfaitement conducteur.

Voyons comment les résultats du § III vont se trouver modifiés. Nous aurons toujours (cf. 1ère partie, page 308)

$$Z = \sum A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2}$$

ou si ρ est très grand:

$$Z = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) \sin\frac{n\omega}{2}. \tag{b}$$

[1] Ce journal, t. 16, p. 297—340.

Le coëfficient A_n doit dépendre du temps et, d'après nos hypothèses, être de la forme:

$$A_n^0 \cos pt + A_n^1 \sin pt. \qquad (p = \alpha V)$$

Mais si Z est de la forme

$$Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt \qquad \text{(cf. 1}^{\text{ère}}\text{ partie, page 306)}$$

ce sera la partie réelle de

$$Z' = (Z_0 - iZ_1)e^{ipt}.$$

Comme Z' satisfait aux mêmes équations que Z, il sera plus simple de considérer Z' au lieu de Z et d'écrire:

$$Z' = \sum (A_n^0 - iA_n^1) J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2} e^{ipt}$$

ou:

$$Z' = \sum a_n e^{ipt} J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2} \qquad (a_n = A_n^0 - iA_n^1)$$

ou en supprimant l'accent de Z' devenu inutile:

$$Z = \sum a_n e^{ipt} J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2}.$$

En supposant ρ très grand, on a:

$$J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) = \frac{e^{i\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right)} + e^{-i\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right)}}{\sqrt{2\alpha\pi\rho}}$$

d'où:

$$(1) \qquad Z = \sum \frac{a_n \sin\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{i\left(\alpha\rho + pt - \frac{n+1}{4}\pi\right)} + \sum \frac{a_n \sin\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{i\left(pt - \alpha\rho + \frac{n+1}{4}\pi\right)}.$$

Le premier terme correspond au faisceau incident, et le second aux divers faisceaux transmis.

Nous avons supposé jusqu'ici que la lentille avait sa ligne focale sur l'axe des z, ce qui se traduisait analytiquement par cette condition que a_n était essentiellement réel; car il ne devait pas y avoir de différence de phase entre les divers rayons incidents.

Mais il n'en est plus de même si la ligne focale ne coïncide pas exactement avec l'axe des z.

Soit en effet O l'origine des coordonnées, soient FM et FM' deux rayons venant se croiser au point F sur la ligne focale. Prenons FM très grand par rapport à OF et $FM' = FM$; la phase du mouvement lumineux devra être la même en M et en M', puisque ces deux points sont à la même distance de la ligne focale. Mais ces deux points ne sont pas à la même distance du point O.

Prenons au contraire sur les deux rayons FM et FM' deux points M_1 et M'_1 situés à une même distance ρ du point O, ρ étant très grand. Si la distance OM_1 est très grande, OM_1 fera un angle très petit avec FM; mais les deux points M_1 et M'_1 n'étant pas à la même distance du point F, la phase ne sera pas la même en ces deux points.

La phase au point M_1 sera proportionnelle à la distance OF multipliée par le cosinus de l'angle de OF avec FM.

L'expression $a_n \sin \frac{n\omega}{2}$ sera donc imaginaire et l'argument de

$$F(\omega) = \sum \frac{a_n \sin \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi a \rho}} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{4}}$$

sera

$$l \cos(\omega - \omega_0),$$

l étant proportionnel à OF et ω_0 représentant l'angle de OF avec l'axe des x.

L'intensité et la phase de la lumière incidente sera ainsi définie par la fonction $F(\omega)$, l'intensité et la phase de la lumière transmise, tant directement que par reflexion ou par diffraction sera alors définie par la fonction:

$$F_1(\omega) = \sum \frac{a_n \sin \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi a \rho}} e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}.$$

Posons maintenant

$$\Phi(\omega) = \sum \frac{a_n \cos \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi a \rho}} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{4}},$$

$$\Phi_1(\omega) = \sum \frac{a_n \cos \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi a \rho}} e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}.$$

il viendra:

$$\Phi + iF = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi a\rho}} \sum a_n e^{in\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\Phi - iF = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi a\rho}} \sum a_n e^{in\left(-\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\Phi_1 + iF_1 = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi a\rho}} \sum a_n e^{in\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\Phi_1 - iF_1 = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi a\rho}} \sum a_n e^{in\left(-\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)},$$

d'où:

$$\Phi(\omega) + iF(\omega) = \Phi(-\omega) - iF(-\omega),$$

(2) $$i\Phi(\omega+\pi) - F(\omega+\pi) = \Phi_1(\omega) + iF_1(\omega),$$

$$i\Phi(\pi-\omega) - F(\pi-\omega) = \Phi_1(\omega) - iF_1(\omega).$$

d'où enfin:

(3) $$F_1(\omega) = \frac{\Phi(\omega+\pi) - \Phi(\pi-\omega)}{2} + i\,\frac{F(\omega+\pi) - F(\pi-\omega)}{2}.$$

Le calcul, sous une autre forme, est tout à fait pareil à celui du § III: $F(\omega)$ dans les notations de la page 308 du § III s'écrirait:

$$F(\omega) = \frac{f(\omega)e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\rho}}.$$

On aurait de même (cf. 1[ère] partie page 309)

$$F_1(\omega) = \frac{f_1(\omega) - if_2(\omega)}{\sqrt{\rho}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et avec les notations de la page 312:

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{a\pi\rho}}\, f(\omega) e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$F_1(\omega) = \sqrt{\frac{2}{a\pi\rho}}\,[\psi_1(\omega) - i\psi_2(\omega)] e^{+\frac{i\pi}{4}}.$$

La seule différence, c'est que la fonction $F(\omega)$ n'est plus supposée réelle.

Le problème est ainsi ramené à la détermination de $\Phi(\omega)$ quand on connait $F(\omega)$.

Or la formule de Fourier nous donne:

$$F(\omega) = \sum \frac{\sin \frac{n\omega}{2}}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \sin \frac{n\alpha}{2} d\alpha$$

d'où:

$$\Phi(\omega) = \sum \frac{\cos \frac{n\omega}{2}}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \sin \frac{n\alpha}{2} d\alpha.$$

d'où on tire:

$$\Phi(\omega) = \int_0^{2\pi} F(\alpha) \frac{d\alpha}{4\pi} \left(\operatorname{cotg} \frac{\omega + \alpha}{4} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha - \omega}{4} \right). \tag{4}$$

Mais cette formule demande une interpretation: en effet la fonction sous le signe $\int$ devient infinie pour $\alpha = \omega$; (je suppose ω compris entre o et 2π) l'intégrale semble donc indéterminée à moins qu'on n'en précise le sens.

L'intégrale $\int_0^{2\pi}$ est indéterminée, mais l'intégrale:

$$\int_0^{\omega - \varepsilon} + \int_{\omega + \varepsilon}^{2\pi}$$

est parfaitement déterminée et tend vers une limite déterminée quand ε tend vers o.

C'est cette limite que Cauchy appelle *valeur principale* de l'intégrale.

C'est cette valeur principale qu'il faut prendre pour $\Phi(\omega)$.

D'aprés notre hypothèse, l'argument de $F(\omega)$ est égal à

$$l \cos (\omega - \omega_0)$$

et l est égal à $2\pi OF$ divisé par la longueur d'onde; ce sera donc un très grand nombre, à moins que OF ne soit très petit.

Nous conviendrons donc de considérer les quantités qui contiennent en facteurs $\frac{1}{\sqrt{l}}$ comme très petites du premier ordre, et celles qui contiennent en facteur $\frac{1}{l}$ comme très petites du 2^d ordre.

L'intégrale

$$\int_a^b e^{il\alpha} f(\alpha)\, d\alpha$$

est alors du second ordre, pourvu que $f(\alpha)$ soit finie dans l'intervalle de a à b ainsi que sa dérivée; car elle est égale à:

$$\frac{e^{ilb}}{il} f(b) - \frac{e^{ila}}{il} f(a) - \frac{1}{il} \int_a^b e^{il\alpha} f'(\alpha)\, d\alpha.$$

Dans les mêmes conditions, l'intégrale:

$$\int_0^b e^{il\alpha^2} f(\alpha)\, d\alpha$$

sera du 1er ordre; en effet la dérivée de $f(\alpha)$ étant finie, nous pourrons poser:

$$f(\alpha) = f(0) + \alpha\varphi(\alpha),$$

$\varphi(\alpha)$ restant finie, et notre intégrale peut alors s'écrire (en posant $\alpha^2 = \beta$):

$$\int_0^\infty e^{il\alpha^2} f(0)\, d\alpha - \int_{b^2}^\infty e^{il\beta} \frac{f(0)\, d\beta}{2\sqrt{\beta}} + \int_0^{b^2} e^{il\beta} \varphi(\sqrt{\beta}) \frac{d\beta}{2}.$$

La première intégrale est du 1er ordre et égale à

$$f(0) \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2l}}$$

et les deux autres sont du 2^d ordre en vertu du théorème précédent.

L'intégrale

(5) $$\int_a^b e^{il\psi(\alpha)} f(\alpha)\, d\alpha$$

sera du 2^d ordre si dans l'intervalle d'intégration $f(\alpha)$ est finie ainsi que sa dérivée et que $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$ et $\frac{1}{\varphi'(\alpha)}$; et en effet en posant

$$\varphi(\alpha) = \beta; \qquad \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} = f_1(\beta).$$

l'intégrale devient:

$$\int e^{il\beta} f_1(\beta) d\beta.$$

Supposons maintenant que $\varphi'(\alpha)$ s'annule dans l'intervalle d'intégration, par exemple pour $\alpha = \alpha_0$; posons:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_0) + \beta^2$$

d'où

$$\varphi'(\alpha) d\alpha = 2\beta d\beta$$

l'intégrale (5) deviendra:

$$e^{il\varphi(\alpha_0)} \int e^{il\beta^2} f_1(\beta) d\beta$$

où

$$f_1(\beta) = f(\alpha) \frac{2\beta}{\varphi'(\alpha)}.$$

D'après les hypothèses faites $[f(\alpha), f'(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha), \frac{1}{\varphi'(\alpha)}$ finis], $f_1(\beta)$ et sa dérivée

$$\frac{df_1}{d\beta} = \frac{4\beta^2 f'}{\varphi'^2} + \frac{2f}{\varphi'} - \frac{4f\varphi''\beta^2}{\varphi'^3}$$

restent finies.

Donc l'intégrale (5) est égale à des quantités près du 2^d ordre à l'intégrale:

$$f_1(0) e^{il\varphi(\alpha_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{il\beta^2} d\beta = \frac{f_1(0) e^{il\varphi(\alpha_0)}}{\sqrt{2l}} \sqrt{\pi}(1 + i).$$

Supposons maintenant que nous envisagions l'intégrale

$$(6) \qquad \int e^{il\alpha} f(\alpha) d\alpha.$$

où nous supposerons que $f(\alpha)$ devienne infinie pour $\alpha = \alpha_0$. Soit par exemple

$$f(\alpha) = \frac{A}{\alpha - \alpha_0} + \varphi(\alpha), \tag{7}$$

$\varphi(\alpha)$ étant finie et continue. L'intégrale (6) n'a pas elle-même aucun sens; mais nous envisagerons sa valeur principale; cette valeur sera évidemment égale à des quantités près du 2^d ordre à la valeur principale de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{il\alpha} \frac{A\,d\alpha}{\alpha - \alpha_0}$$

qu'il est aisé de trouver et qui est égale à:

$$A\pi e^{il\alpha_0}.$$

De même l'intégrale

$$\int e^{il\varphi(\alpha)} f(\alpha)\,d\alpha,$$

où $f(\alpha)$ est de la forme (7), où $\varphi(\alpha)$ est finie et continue et où $\varphi'(\alpha)$ ne s'annule pas, sera égal à des quantités du second ordre près à

$$A\pi e^{il\varphi(\alpha_0)}.$$

Appliquons ces principes à l'intégrale (4) qui peut s'écrire:

$$\int_0^{2\pi} e^{il\cos(\alpha - \omega_0)} F_0(\alpha) \frac{d\alpha}{4\pi} \left(\operatorname{cotg} \frac{\omega + \alpha}{4} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha - \omega}{4}\right),$$

où $F_0(\alpha)$ qui est le module de $F(\alpha)$ a une valeur finie; nous pouvons même supposer que $F_0(\alpha)$ soit continu.

La fonction

$$F_0(\alpha)\left(\operatorname{cotg} \frac{\omega + \alpha}{4} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha - \omega}{4}\right)$$

ne cesse d'être finie et continue que pour $\alpha = \omega$. L'exposant

$$il \cos(\alpha - \omega_0)$$

a sa dérivée qui s'annule pour

$$\alpha = \omega_0, \qquad \alpha = \omega_0 + \pi.$$

Si donc nous négligeons les quantités du 2[d] ordre, nous n'aurons à envisager que les éléments de l'intégrale qui sont voisins de $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega_0$, $\alpha = \omega_0 + \pi$.

Considérons d'abord les premiers; la valeur principale de l'intégrale dans le voisinage de $\alpha = \omega$, sera:

$$e^{il\cos(\omega-\omega_0)}F_0(\omega) = F(\omega).$$

Tenons compte enfin des éléments voisins de $\alpha = \omega_0 + \pi$, il viendra:

$$\alpha_0 = \omega_0 + \pi; \qquad \varphi(\alpha) = \cos(\alpha - \omega_0); \qquad \varphi'(\alpha) = -\sin(\alpha - \omega_0);$$

$$\beta^2 = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha_0) = \cos(\alpha - \omega_0) - \cos\pi = 2\cos^2\left(\frac{\alpha - \omega_0}{2}\right)$$

$$\frac{2\beta}{\varphi'(\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha-\omega_0}{2}}{-\sin(\alpha-\omega_0)} = \frac{-\sqrt{2}}{\sin\frac{\alpha-\omega_0}{2}};$$

$$f(\alpha) = \frac{F_0(\alpha)}{4\pi}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\alpha}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\alpha-\omega}{4}\right)$$

$$f_1(\beta) = f(\alpha)\frac{-\sqrt{2}}{\sin\frac{\alpha-\omega_0}{2}};$$

$$f_1(0) = \frac{-\sqrt{2}\,F_0(\omega_0+\pi)}{4\pi}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\omega_0+\pi}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\pi+\omega_0-\omega}{4}\right).$$

La partie correspondante de l'intégrale sera donc:

$$-\frac{e^{-il}(1+i)}{\sqrt{l}}\frac{4}{\sqrt{\pi}}F_0(\omega_0+\pi)\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi+\omega_0+\omega}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\pi+\omega_0-\omega}{4}\right).$$

La partie de l'intégrale qui correspond à $\omega = \omega_0$ se calculerait de la même manière.

On trouverait

$$\frac{e^{il}(1-i)}{\sqrt{l}}\frac{4}{\sqrt{\pi}}F_0(\omega_0)\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\omega_0}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\omega_0-\omega}{4}\right);$$

mais pour mener à bien ce calcul il faudrait observer que $\varphi(\alpha)$ pour $\alpha = \omega_0$ atteint non pas un minimum, mais un maximum; et poser, non pas:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_0) + \beta^2,$$

mais bien

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_0) - \beta^2.$$

L'interprétation de ces résultats est aisée.

Négligeons d'abord les termes du 1er ordre et ne tenons compte que des termes finis; il vient alors:

$$\Phi(\omega) = F(\omega)$$

d'où:

$$(8) \qquad F_1(\omega) = (1 + i)\frac{F(\omega + \pi) - F(\pi - \omega)}{2}.$$

Comparons ce résultat avec celui que nous avons obtenu au n° 3, c'est à dire dans les conditions d'une mise au point parfaite.

Nous devions alors diviser $F_1(\omega)$ en deux termes dont le premier:

$$\frac{\Phi(\omega + \pi) - \Phi(\pi - \omega)}{2}$$

représente la lumière diffractée tandis que l'autre

$$(9) \qquad i\frac{F(\omega + \pi) - F(\pi - \omega)}{2}$$

représente la lumière transmise directement ou réfléchie.

Alors on retrouvait une moitié de l'énergie incidente dans la lumière diffractée, un quart dans la lumière transmise et un quart dans la lumière réfléchie.

Pour passer de l'expression (9) à l'expression (8), il suffit de la multiplier par $(1 - i)$. Les intensités correspondantes se trouvent doublées et on retrouve la moitié de l'énergie incidente dans la lumière transmise et une moitié dans la lumière réfléchie. La portion de l'énergie qui se transforme en lumière diffractée est de l'ordre des quantités négligées, c'est à dire du 1er ordre.

Tenons compte maintenant des termes du 1er ordre.

On voit qu'en ce qui concerne ces termes, tout se passe comme si l'intégrale qui donne $\Phi(\omega)$ se réduisait à deux éléments, celui qui est voisin de $\alpha = \omega_0$ et celui qui est voisin de $\alpha = \omega_0 + \pi$. Dans chacun de ces éléments, l'argument de $F(\alpha)$ qui passe par un maximum ou un minimum demeure sensiblement constant; de sorte que pour chacun d'eux tout se passe comme dans le n° III.

Le rôle prépondérant joué par ces éléments est aisé à comprendre; et la signification physique de cette prépondérance est manifeste; les seuls rayons qui subissent l'effet de la diffraction sont ceux qui passent près du bord de l'écran. Evidemment d'ailleurs ceux qui se rapprochent le plus du bord de l'écran, c'est à dire de O, sont ceux dont la direction est voisine de OF, puisque tous passent par le foyer, c'est à dire par F.

Dans les expériences telles qu'elles sont ordinairement faites, un seul de ces éléments interviendra. En effet le faisceau concentré par la lentille aura une ouverture limitée, en tout cas inférieure à π. Par conséquent la fonction $F(\alpha)$ qui définit l'intensité et la phase du faisceau incident sera nulle sauf quand α sera compris entre deux limites α_0 et α_1, conformément aux inégalités

$$\alpha_0 < \alpha < \alpha_1.$$

Si ω_0 est compris entre α_0 et α_1, il n'en sera pas de même de $\omega_0 + \pi$. Si donc $F(\omega_0)$ n'est pas nul, $F(\omega_0 + \pi)$ sera nul; de sorte que l'élément correspondant à ω_0 interviendra seul.

En résumé, dans le calcul des termes du 1er ordre, tout se passera comme si le faisceau au lieu d'avoir une ouverture égale à $\alpha_1 - \alpha_0$ avait une ouverture beaucoup plus petite et si l'angle α variait seulement de $\omega_0 - \varepsilon$ à $\omega_0 + \varepsilon$. A cela près, il n'y aura rien de changé aux conclusions du n° III.

Dans le mémoire que j'ai cité, M. Sommerfeld retrouve les mêmes résultats que moi, bien qu'il traite un problème en apparence bien différent. Après ce qui précède, nous ne devons plus nous en étonner; le cas qu'il traite et qui est celui de la lumière parallèle peut être regardée comme le cas extrême de la mauvaise mise au point, et nous venons de voir que le défaut de mise au point n'influait pas sur nos résultats les plus essentiels.

VIII.

Je voudrais maintenant indiquer le moyen de tenir compte de la courbure du tranchant du biseau. Pour cela j'attribuerai à la section droite de ce biseau une forme aussi simple que possible, à savoir celle d'une hyperbole dont le sommet sera très voisin du centre. Alors cette hyperbole se confondra sensiblement avec ses asymptotes sauf dans la partie très voisine du sommet qui présentera au contraire un rayon de courbure très faible. Nous nous rapprocherons ainsi suffisamment du cas réalisé par un biseau dont le tranchant est imparfait.

Soit

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

l'équation d'un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales. Soient x et y les coordonnées rectangulaires d'un point; soient λ et μ ses coordonnées elliptiques, λ étant le paramètre correspondant à l'ellipse et μ à l'hyperbole.

Soit alors

$$\mu = \mu_0$$

l'équation de la section droite du biseau.

Comme l'angle de ce biseau doit être très aigu et son tranchant presque parfait, il faut que c soit très petit et $\mu_0 < c$, mais très voisin de c; je veux dire que $\frac{c - \mu_0}{c}$ doit être très petit; car cette dernière quantité est de l'ordre de l'angle des deux asymptotes.

Il vient alors:

$$x = \frac{\lambda\mu}{c}, \qquad y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}$$

$$dx^2 + dy^2 = d\lambda^2 \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} + d\mu^2 \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}$$

$$(\lambda^2 - \mu^2)\Delta u = (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + \lambda \frac{du}{d\lambda} + (c^2 - \mu^2)\frac{d^2 u}{d\mu^2} - \mu \frac{du}{d\mu}.$$

Si maintenant nous considérons, soit Z dans l'hypothèse où le plan de polarisation est le plan d'incidence, soit la force magnétique γ, si ces deux plans sont rectangulaires, nous verrons que Z ou γ devra être la partie réelle de ue^{ivt}; u satisfaisant à l'équation

$$\Delta u + \alpha^2 u = 0.$$

et cette équation devient:

$$(\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + \lambda\frac{du}{d\lambda} + (c^2 - \mu^2)\frac{d^2 u}{d\mu^2} - \mu\frac{du}{d\mu} + \alpha^2(\lambda^2 - \mu^2)u = 0.$$

Nous pourrons satisfaire à cette équation en posant:

$$u = LM,$$

L étant fonction de λ seulement et M de μ seulement et en supposant que L et M satisfassent aux équations:

(1) $$(\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 L}{d\lambda^2} + \lambda\frac{dL}{d\lambda} + \alpha^2(\lambda^2 - k)L = 0,$$

(2) $$(\mu^2 - c^2)\frac{d^2 M}{d\mu^2} + \mu\frac{dM}{d\mu} + \alpha^2(\mu^2 - k)M = 0,$$

où k est une constante quelconque.

Il faut voir comment doit être choisie la constante k et aussi parmi toutes les intégrales des équations du second ordre (1) et (2) quelles sont celles qu'il faut choisir.

D'abord λ peut varier depuis c jusqu'à $+\infty$ et μ depuis $-c$ jusqu'à μ_0.

Nous étudierons donc l'équation (1) dans le voisinage de $\lambda = c$ et nous verrons que cette équation admet deux intégrales, la première développable suivant les puissances entières de $\lambda - c$, la seconde suivant les puissances impaires de $\sqrt{\lambda - c}$. La première pourra s'appeler la solution paire et la seconde la solution impaire.

Nous étudierons de même l'équation (2) dans le voisinage de $\mu = -c$ et nous trouverons de même deux solutions, une solution paire développable suivant les puissances entières de $\mu + c$ et une solution impaire développable suivant les puissances impaires de $\sqrt{\mu + c}$.

Si l'on veut que LM soit une fonction uniforme de x et de y, il faut choisir pour L soit la solution paire, soit la solution impaire de (1), et pour M la solution de même parité de (2).

Ainsi, L devra être soit la solution paire, soit la solution impaire et non pas une combinaison linéaire de ces deux solutions, et on obtiendra M en changeant dans L la variable λ en $-\mu$. Pour déterminer la constante k on aura l'une des deux conditions suivantes:

1°. Si le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence on devra avoir

$$M = 0 \qquad \text{pour } \mu = \mu_0.$$

2°. Si au contraire le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence, on devra avoir:

$$\frac{dM}{d\mu} = 0 \qquad \text{pour } \mu = 0.$$

Si nous posons

$$\mu = -c \cos \omega$$

l'équation qui donne u devient:

$$(3) \qquad (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2u}{d\lambda^2} + \lambda\frac{du}{d\lambda} + \frac{d^2u}{d\omega^2} + \alpha^2(\lambda^2 - c^2\cos^2\omega)u = 0$$

et l'équation (2) devient

$$(2') \qquad \frac{d^2M}{d\omega^2} = \alpha^2 M(c^2\cos^2\omega - k).$$

Nous désignerons par ω_0 la valeur de ω qui correspond à $\mu = \mu_0$.

Si on avait supposé $c = 0$, on serait retombé sur les conditions du n° IV, l'écran aurait été un biseau parfait limité par les deux plans

$$\omega = -\omega_0, \qquad \omega = \omega_0$$

tandis que dans le n° IV, nous avions pris comme plans limites de notre biseau

$$\omega = 0, \qquad \omega = \lambda\pi;$$

(cf. loco citato page 321); mais ce n'est qu'une différence de notation.

Si nous supposons en outre $\omega_0 = \pi$, nous retombons sur les conditions du § III, c'est à dire sur le cas d'un écran plan infiniment mince; seulement le plan de l'écran est $\omega = \pi$ et non $\omega = 0$, ce qui n'est encore qu'une différence de notation.

Enfin si ne supposant plus $c = 0$, nous faisons $\omega_0 = \pi$ d'où $\mu_0 = c$;

l'hyperbole $\mu = \mu_0$ se réduit à une droite et nous retombons encore sur le cas du § III.

Supposons maintenant que le plan de polarisation soit perpendiculaire au plan d'incidence; ce n'est plus M, mais $\frac{dM}{d\omega}$ qui doit s'annuler pour $\omega = \pm \omega_0$.

Disons quelques mots du cas de $\omega_0 = \pi$ qui comme nous l'avons vu se ramène au cas du § III. Nous distinguerons alors quatre sortes de solutions.

1ère sorte: plan de polarisation parallèle au plan d'incidence; M est une fonction impaire de ω; c'est de plus une fonction périodique de ω de période 2π.

On a alors

$$M_0 = \sin\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \sin m\omega, \qquad (m \text{ entier}).$$

2e sorte: plan de polarisation parallèle au plan d'incidence; M est une fonction paire de ω; elle se change en $-M$ quand ω se change en $\omega + 2\pi$

$$M_0 = \cos\frac{m\pi\omega}{\omega} = \cos m\omega, \qquad (2m \text{ impair}).$$

3e sorte: plan de polarisation perpendiculaire au plan d'incidence; M est une fonction impaire de ω et se change en $-M$ quand ω se change en $\omega + 2\pi$

$$M_0 = \sin\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \sin m\omega, \qquad (2m \text{ impair}).$$

4e sorte: plan de polarisation perpendiculaire au plan d'incidence; M fonction paire de ω, périodique de periode 2π

$$M_0 = \cos\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \cos m\omega, \qquad (m \text{ entier})$$

(ces quatre sortes de solution se retrouvent d'ailleurs dans le cas général où ω_0 n'est pas égal à π)

S'il n'y avait pas d'écran, les solutions de la 1ère et de la 4e sortes subsisteraient seules.

Mais si nous examinons l'équation (2'), nous reconnaitrons une équation que l'on rencontre fréquemment en mécanique céleste et qu'ont

étudiée MM. Gyldén, Bruns, Tisserand, Callandreau. J'ai résumé les principaux résultats connus au sujet de cette équation dans le chapitre XVIII du tome II de mon ouvrage sur les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste.

Cette équation admet deux solutions qui sont de la forme

$$e^{a\omega}F(\omega)\,,\ e^{-a\omega}F_1(\omega).$$

$F(\omega)$ et $F_1(\omega)$ étant périodiques de période 2π.

Pour certaines valeurs des constantes, l'exposant a devient un multiple de $\frac{i}{2}$; alors une des deux solutions subsiste seule et elle est périodique de période 2π ou 4π. Ce sont précisément les solutions qui conviennent au cas de $\omega_0 = \pi$; les quatre sortes de solutions correspondent dans un ordre convenable aux cas où le nombre entier $\frac{2a}{i}$ est congru 0, 1, 2, ou 3 (mod 4).

Une autre remarque mérite de retenir un instant notre attention. On sait que M. Gyldén a ramené approximativement l'équation (2′) à l'équation de Lamé. D'autre part la façon dont nous l'avons obtenue la rattache également à l'équation de Lamé, mais il faut chercher à se rendre compte de la nature du lien qui les unit.

Soit

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

un système d'ellipsoïdes homofocaux; soient ρ, μ, ν les coordonnées elliptiques d'un point et soit:

$$\xi = \int \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}; \qquad \eta = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}};$$

$$\zeta = \int \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}}.$$

L'équation $\Delta V = 0$ devient alors:

$$(5) \qquad (\mu^2 - \nu^2)\frac{d^2V}{d\xi^2} + (\nu^2 - \rho^2)\frac{d^2V}{d\eta^2} + (\rho^2 - \mu^2)\frac{d^2V}{d\zeta^2} = 0.$$

Si alors nous posons

$$V = RMN,$$

et que R soit défini par l'équation

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} = R(A\rho^2 + B) \tag{6}$$

où A et B sont des constantes quelconques; si M et N se déduisent de R en changeant ρ en μ et en ν; l'équation (5) se trouvera satisfaite.

L'équation (6) n'est autre chose que ce qu'on appelle l'équation de Lamé.

Si l'on suppose b très grand, et que l'on ait:

$$\rho^2 > b^2 > \mu^2 > c^2 > \nu^2,$$

on voit que ρ sera également très grand et que l'on aura sensiblement

$$\mu = c\cos(b\eta), \qquad \nu = c\cos(b\zeta).$$

L'équation (6) ou plutôt l'équation analogue:

$$\frac{d^2M}{d\eta^2} = M(A\mu^2 + B)$$

devient alors en posant $b\eta = \omega$:

$$\frac{d^2M}{d\omega^2} = M\left(\frac{A}{b^2}\cos^2\omega + \frac{B}{b^2}\right)$$

de sorte que nous retrouvons l'équation (2').

Il nous reste à voir comment l'équation (5) se ramène à l'équation en u; c'est à dire à l'équation (3).

Nous avons supposé b et ρ très grands; posons

$$V = Ru,$$

R dépendant seulement de ξ, u dépendant seulement de η et de ζ. Nous poserons

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} = b^2\alpha^2\rho^2R; \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2V}{d\xi^2} = b^2\alpha^2\rho^2V;$$

nous voyons que α^2 ne dépend que de ξ; ce sera donc une constante, si nous regardons ρ et ξ comme des constantes; je supposerai que α^2 est fini et $b^2\alpha^2\rho^2$ très grand et je ne conserverai dans l'équation (5) que les termes qui contiennent ρ^2 en facteur. Il viendra en divisant par $\rho^2 R$:

$$b^2\alpha^2(\mu^2 - \nu^2)u + \frac{d^2u}{d\zeta^2} - \frac{d^2u}{d\eta^2} = 0$$

ou, en divisant par b^2:

$$\frac{d^2u}{d\mu^2}(c^2 - \mu) - \mu\frac{du}{d\mu} + \frac{d^2u}{d\nu^2}(\nu^2 - c^2) + \nu\frac{du}{d\nu} + \alpha^2(\nu^2 - \mu^2)u = 0,$$

ce qui est bien notre équation en u à la différence des notations près, λ étant remplacé par ν.

IX.

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent les fonctions M; les fonctions L, comme nous l'avons vu, s'en déduisent en changeant μ en $-\lambda$.

Mais j'ai surtout besoin de connaître les propriétés de ces fonctions L pour les valeurs très grandes de λ.

Il est clair, d'après la forme de l'équation (1) que la valeur approchée de cette fonction pour λ très grand sera:

$$A\frac{e^{i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + B\frac{e^{-i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

où A et B sont des constantes, et le principal problème qu'il nous reste à résoudre est la détermination du rapport $\frac{B}{A}$.

Il y a des cas où nous savons faire cette détermination.

1°. Si $c = 0$; la fonction L n'est alors autre chose que la fonction de Bessel; et on a:

$$L = J_{a\sqrt{\lambda}}(\alpha\lambda)$$

d'où: pour λ très grand

$$L = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}} \cos\left|\alpha\lambda - \left(\frac{\alpha\sqrt{k}}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi\right|.$$

Le rapport $\frac{B}{A}$ est alors égal à

$$e^{i\pi\left(\alpha\sqrt{k} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Quant à la valeur de k, il est aisé de la déduire de celle de ω_0; on voit que $\alpha\sqrt{k}$ doit être un multiple de $\frac{\pi}{2\omega_0}$. En résumé le rapport $\frac{B}{A}$ devra être égal à

$$e^{\frac{i\pi}{2}\left(\frac{m\pi}{\omega_0}+1\right)},$$

m étant entier.

2°. Si $\omega_0 = \pi$; l'écran se réduit alors à un plan infiniment mince et les conclusions du § III doivent s'appliquer. La fonction L n'est plus une fonction J_n, mais elle est développable en série procédant suivant les fonctions J_n.

Supposons d'abord que L (et M) soit une solution de la 1ère sorte. Alors LM est une fonction de λ et de μ qui change de signe quand on change $\sqrt{c^2-\mu^2}$ en $-\sqrt{c^2-\mu^2}$ ou quand on change $\sqrt{\lambda^2-c^2}$ en $-\sqrt{\lambda^2-c^2}$; on peut également l'exprimer en fonction de x et de y; on voit alors que c'est une fonction uniforme de x et de y qui change de signe avec y.

Mais il vaut mieux poser:

$$x = c + \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega$$

de façon à introduire des coordonnées polaires ρ et ω; l'angle ω n'est pas alors le même que celui qu'on a introduit en posant $\mu = -c\cos\omega$.

On voit alors que l'on doit avoir:

$$LM = A_1 J_1(\alpha\rho)\sin\omega + A_2 J_2(\alpha\rho)\sin 2\omega + A_3 J_3(\alpha\rho)\sin 3\omega + \ldots;$$

A_1, A_2, A_3 étant des coëfficients quelconques.

Pour ρ très grand on a sensiblement:

$$\mu = -c\cos\omega; \qquad \lambda = \rho + c\cos\omega,$$

$$J_n(\alpha\rho) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}}\cos\left(\alpha\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

ou approximativement:

$$J_n(\alpha\rho) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}} \cos\left(\alpha\lambda - \alpha c \cos\omega - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

d'où:

$$LM = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}} e^{\alpha i\lambda - \alpha ic\cos\omega}\left[A_1 \sin\omega\, e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{-\frac{5i\pi}{4}} + A_3 \sin 3\omega\, e^{-\frac{7i\pi}{4}} + \ldots\right]$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}} e^{-\alpha i\lambda + \alpha ic\cos\omega}\left[A_1 \sin\omega\, e^{+\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{\frac{5i\pi}{4}} + \ldots\right].$$

Le rapport $\frac{B}{A}$ est donc égal à

$$e^{2\alpha ic\cos\omega} \frac{A_1 \sin\omega\, e^{\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{\frac{5i\pi}{4}} + A_3 \sin 3\omega\, e^{\frac{7i\pi}{4}} + \ldots}{A_1 \sin\omega\, e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{-\frac{5i\pi}{4}} + A_3 \sin 3\omega\, e^{-\frac{7i\pi}{4}} + \ldots}$$

et il doit être indépendant de ω.

Si nous faisons dans l'expression précédente $\omega = \frac{\pi}{2}$, les termes qui contiennent les sinus d'un multiple pair de ω disparaissent et il reste:

$$\frac{B}{A} = \quad i.$$

Si L est M étaient des solutions de la 4e sorte on aurait eu:

$$LM = A_1 J_1(\alpha\rho)\cos\omega + A_2 J_2(\alpha\rho)\cos 2\omega + \ldots$$

et après un calcul tout pareil au précédent:

$$\frac{B}{A} = e^{2\alpha ic\cos\omega} \frac{A_0 e^{\frac{i\pi}{4}} + A_1 \cos\omega\, e^{\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \cos 2\omega\, e^{\frac{5i\pi}{4}} + \ldots}{A_0 e^{-\frac{i\pi}{4}} + A_1 \cos\omega e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \cos 2\omega\, e^{-\frac{5\pi i}{4}} + \ldots}.$$

En faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$ on aurait vu disparaître les termes qui tenaient en facteur un cosinus d'un multiple impair de ω et on aurait trouvé:

$$\frac{B}{A} = i.$$

Si L et M étaient des solutions de la seconde sorte on aurait eu:

$$LM = \Sigma A_m J_m(\alpha\rho)\cos m\omega,$$

m étant la moitié d'un nombre impair; d'où:

$$\frac{B}{A} = e^{2uic\cos\omega}\frac{\Sigma A_m \cos m\omega\, e^{\frac{2m+1}{4}i\pi}}{\Sigma A_m \cos m\omega\, e^{-\frac{2m+1}{4}i\pi}}.$$

En faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$, il vient:

$$\frac{B}{A} = \frac{\Sigma A_k + i\Sigma A_p}{\Sigma A_k - i\Sigma A_p}$$

où ΣA_k est la somme des coëfficients A_m tels que $2m \equiv 3 \pmod 4$ tandis que ΣA_p est la somme des coëfficients A_m tels que $2m \equiv 1 \pmod 4$.

On voit que le rapport $\frac{B}{A}$ dépend de c et il en serait encore de même en ce qui concerne les solutions de la 3e sorte.

Revenons aux solutions de la 1ère sorte; on voit que la série

$$A_1 \sin\omega\, e^{\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{-\frac{5i\pi}{4}} + \dots$$

représente le développement par la formule de Fourier de

$$Ke^{uic\cos\omega} M,$$

K désignant une constante et où dans la fonction M on a remplacé μ par $-c\cos\omega$.

Je dis maintenant que le rapport $\frac{B}{A}$ a toujours pour module l'unité. En effet d'après ce que nous avons vu plus haut, L est développable suivant les puissances de

$$\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}};$$

le développement est convergent pour toutes les valeurs de λ dont la partie réelle est positive; il contient seulement des puissances impaires ou seulement des puissances paires. Le rapport d'un coëfficient au pré-

cédent est facile à calculer; on peut sans restreindre la généralité supposer que le premier coefficient est égal à 1; alors tous les autres seront réels et L sera une fonction réelle.

La valeur approchée de L devra donc être aussi une fonction réelle; c'est à dire que A et B devront être imaginaires conjugués; donc leur rapport aura pour module l'unité. Nous poserons donc:

$$\frac{B}{A} = e^{i\theta}$$

où θ est un nombre réel qui fait connaître l'excès de la marche optique sur la marche géométrique des rayons correspondant au mouvement lumineux représenté par la fonction LM près de l'écran.

Ce nombre θ est une fonction continue de $\alpha^2 c^2$ et de $\alpha^2 k$.

X.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 L}{d\lambda^2} + \lambda \frac{dL}{d\lambda} + \alpha^2(\lambda^2 - k)L = 0.$$

Parmi les solutions de cette équation, nous en distinguerons deux: la solution paire qui est développable suivant les puissances paires de

$$\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}.$$

le premier coëfficient se réduisant à l'unité. Nous la représenterons par la notation

$$L = F_1\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k\right);$$

et la solution impaire qui est développable suivant les puissances impaires de

$$\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}},$$

le premier coëfficient se réduisant à l'unité. Nous la représenterons par

$$L = F_2\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k\right).$$

Pour une valeur donnée de $\frac{\lambda}{c}$, F_1 et F_2 sont des fonctions *entières* de $\alpha^2 c^2$ et $\alpha^2 k$.

Ce n'est pas tout. Reprenons les coëfficients que nous avons appelés A et B dans le paragraphe précédent; et qui, nous l'avons vu, sont imaginaires conjugués.

Voici alors comment se présentent les diverses solutions de notre problème:

1°. Solutions de la 1ère sorte; plan de polarisation parallèle à celui d'incidence; M fonction impaire de ω.

On déterminera k_i par l'équation:

$$(A_1) \qquad F_2\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right) = 0$$

dont le premier membre est une fonction entiere de k_i; et on prendra:

$$L_i = F_2\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right); \qquad M_i = F_2\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right)$$

$$u = L_i M_i.$$

2e sorte; les deux plans parallèles, M pair.

On déterminera k_i par

$$(A_2) \qquad F_1\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right)$$

et on prendra

$$L_i = F_1\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 k_i\right); \qquad M_i = F_1\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2 k_i\right).$$

3e sorte; les deux plans perpendiculaires, M impair.

On déterminera k_i par

$$(A_3) \qquad F_2'\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right) = 0.$$

Je désigne par F'_1 et F'_2 les dérivées de F_1 et F_2 par rapport à $\frac{\lambda}{c}$; on prendra

$$L_i = F_2\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 k_i\right), \qquad M_i = F_2\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2 k_i\right).$$

4e sorte; les deux plans perpendiculaires, M pair.

On détermine k_i par

$$(A_4) \qquad F'_1\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right) = 0$$

et on prend

$$L_i = F_1\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 k_i\right), \qquad M_i = F_1\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2 k_i\right).$$

Soient M_i et M_n deux solutions *de la même sorte,* soient M'_i, M'_n, M''_i, M''_n leurs dérivées premières et secondes par rapport à ω.

On aura les équations:

$$(2) \qquad \begin{aligned} M''_i &= \alpha^2 M_i(c^2 \cos^2\omega - k_i) \\ M''_n &= \alpha^2 M_n(c^2 \cos^2\omega - k_n). \end{aligned}$$

L'expression

$$(3) \qquad M_i M'_n - M_n M'_i$$

a pour dérivée:

$$M_i M''_n - M_n M''_i.$$

Mais pour $\omega = \pm\, \omega_0$, M_i et M_n s'annulent toutes deux, à moins que ce ne soient leurs dérivées M'_i et M'_n; dans tous les cas l'expression (3) s'annule de sorte que l'on a:

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (M_i M''_n - M_n M''_i)\, d\omega = 0$$

ou en tenant compte des équations (2)

$$(k_i - k_n) \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i M_n\, d\omega = 0$$

ou (si l'on suppose $k_i \gtrless k_n$):

$$(4) \qquad \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i M_n d\omega = 0.$$

Cela montre que M_i et M_n ne peuvent être imaginaires conjuguées et par conséquent que les équations (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) ne peuvent avoir de racines imaginaires.

Soit maintenant l'expression $M_i M_i'$ dont la dérivée est

$$M_i'^2 + M_i M_i''.$$

Cette expression s'annulant pour $\omega = \pm \omega_0$, on aura:

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (M_i'^2 + M_i M_i'') d\omega = 0,$$

ou en tenant compte de (2):

$$\alpha^2 k_i \int M_i^2 d\omega = \alpha^2 c^2 \int M_i^2 \cos^2 \omega d\omega + \int M_i'^2 d\omega,$$

ce qui montre que k_i ne peut être négatif.

Les équations (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) ne peuvent donc avoir que des racines réelles positives.

Les équations (A_1) et (A_3) ne peuvent avoir de racine commune car si pour $\lambda = -\mu_0$, la fonction F_2 s'annulait ainsi que sa dérivée; cette fonction en vertu de l'équation (1) serait identiquement nulle.

Les équations (A_1) et (A_2) ne peuvent avoir de racine commune, car si pour $\lambda = -\mu_0$, les deux fonctions F_1 et F_2 s'annulaient, la solution générale de l'équation (1) qui n'est qu'une combinaison linéaire de F_1 et de F_2 devrait s'annuler également, ce qui est absurde, puisque l'équation (1) doit admettre une solution dont la valeur pour $\lambda = -\mu_0$, ainsi que celle de sa dérivée première, doit pouvoir être choisie arbitrairement.

On démontrerait de même que (A_2) et (A_4), (A_3) et (A_4) ne peuvent avoir de solution commune.

Mais pour $\alpha^2 c^2 = 0$, les équations (A_1) et (A_4) admettent pour racines

$$\alpha^2 k^2 = \frac{m^2 \pi^2}{\omega^2} \qquad (m \text{ entier})$$

et les équations (A_2) et (A_3) admettent

$$\alpha^2 k^2 = \frac{m^2\pi^2}{\omega_0^2} \qquad (2m \text{ entier impair}).$$

On voit que pour $\alpha^2 c^2 = 0$ les racines de (A_1) et de (A_3) sont réelles et se séparent mutuellement. Mais comme ces racines ne peuvent jamais cesser d'être réelles et que deux d'entre elles ne peuvent jamais se confondre, elles ne pourront jamais cesser de se séparer.

Donc quelque soit $\alpha^2 c^2$ les racines de (A_1) et de (A_3) se sépareront mutuellement et il en sera de même de celles de (A_1) et de (A_2); de celles de (A_2) et de (A_4); de celles de (A_3) et de (A_4).

Nous admettons que toute fonction impaire de ω, $f(\omega)$, peut pour $-\omega_0 < \omega < \omega_0$ être développée en série procédant suivant les diverses solutions $M_i(\omega)$ de la 1ère sorte correspondant aux diverses racines de (A_1). Soit alors:

$$f(\omega) = \Sigma A_i M_i(\omega);$$

il s'agit de calculer les coëfficients A_i; en intégrant de $-\omega_0$ à $+\omega_0$ après avoir multiplié par $M_i(\omega)$ et tenant compte des relations (4), on trouve:

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i f d\omega = A_i \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i^2(\omega)\, d\omega;$$

désignons pour abréger par H_i les constantes

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i^2(\omega)\, d\omega,$$

il viendra:

$$f(\omega) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} f(\alpha)\, d\alpha \sum \frac{M_i(\alpha) M_i(\omega)}{H_i}. \tag{5}$$

De même nous admettrons

1° que toute fonction paire $f(\omega)$ peut se développer suivant les solutions $M_i(\omega)$ de la 2e sorte correspondant aux racines de (A_2);

2° que toute fonction impaire $f(\omega)$ peut se développer suivant les solutions $M_i(\omega)$ de la 3e sorte correspondant aux racines de (A_3);

3° que toute fonction paire $f(\omega)$ peut se développer suivant les solutions $M_i(\omega)$ de la 4e sorte correspondant aux racines de (A_4).

Tous ces développements, on le verrait par la même analyse, seraient encore représentés par la formule (5).

Cela posé, envisageons une solution du problème de la diffraction; nous supposerons d'abord que le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence, et que le champ présente une symétrie telle que Z ait des valeurs égales et de signe contraire en deux points symétriques l'un de l'autre par rapport au plan des xz.

On aura alors:

$$Z = \text{partie réelle } ue^{ipt}$$

et

$$u = \Sigma C_n L_n M_n.$$

Les M_n sont des solutions de la 1ère sorte de nos équations, les L_n sont les fonctions L correspondantes, les C_n des coëfficients constants.

En un point très éloigné on aura sensiblement (cf. § IX au début):

$$L_n = A_n \frac{e^{i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + B_n \frac{e^{-i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Les deux constantes A_n et B_n sont imaginaires conjuguées et leur rapport est égal à $e^{i\theta_n}$; nous pourrons poser

$$A_n = |A_n| e^{\frac{i\theta_n}{2}}; \qquad B_n = |A_n| e^{-\frac{i\theta_n}{2}}.$$

A chaque racine k_n de l'équation (A_1) correspond une fonction M_n, une fonction L_n et trois constantes A_n, B_n et θ_n.

Nous tirerons de là:

$$u = \frac{e^{i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \Sigma A_n C_n M_n + \frac{e^{-i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \Sigma B_n C_n M_n. \tag{6}$$

Le premier terme correspond à la lumière incidente, le second à la lumière diffractée, réfléchie ou transmise. Si donc nous posons:

$$\Sigma A_n C_n M_n = F(\omega), \qquad \Sigma B_n C_n M_n = F_1(\omega),$$

la fonction $F(\omega)$ pourra être regardée comme donnée et c'est $F_1(\omega)$ qu'il s'agit de calculer.

D'après la formule (5), on aura:

$$F(\omega) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\psi) d\psi \sum \frac{M_n(\psi) M_n(\omega)}{H_n} \tag{7}$$

et

$$F_1(\omega) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\psi) d\psi \sum \frac{e^{i\theta_n} M_n(\psi) M_n(\omega)}{H_n} \tag{8}$$

(j'emploie la lettre ψ au lieu de α comme dans la formule (5) afin d'éviter toute confusion avec le coëfficient α qui figure dans l'exponentielle $e^{i\alpha\lambda}$).

Nous avons supposé que la force électrique Z était une fonction impaire de y et que les deux plans d'incidence et de polarisation étaient parallèles.

Qu'y aurait-il à changer:

1° si Z était une fonction paire de y et si les deux plans restaient parallèles.

2° si les deux plans étaient perpendiculaires et si la force magnétique N était une fonction impaire de y.

3° si les deux plans étaient perpendiculaires et si N était une fonction paire de y.

Il est clair que dans ces trois cas les formules (6), (7) et (8) subsisteraient sauf que les fonctions M_n de la 1ère sorte devraient être remplacées par des fonctions de la 2e, de la 3e et de la 4e sorte.

On voit le rôle que jouent les deux séries

$$\sum \frac{M_n(\psi) M_n(\omega)}{H_n}, \tag{9}$$

$$\sum \frac{e^{i\theta_n} M_n(\psi) M_n(\omega)}{H_n}. \tag{10}$$

Malheureusement ces deux séries sont divergentes et c'est de là que vient toute la difficulté. Pour nous en rendre compte, examinons le cas de $c = 0$ et considérons d'abord le cas des solutions de la 1ère sorte.

On a alors:

$$M_n(\omega) = \frac{\sin n\beta\omega}{n\beta}; \qquad H_n = \frac{\omega_0^3}{n^2\pi^2}; \qquad \theta_n = \pi\left(n\beta + \frac{1}{2}\right).$$

où n est la moitié d'un nombre impair et où

$$\beta = \frac{\pi}{\omega_0}.$$

Les deux séries que nous avons à examiner sont donc au facteur constant près: $\frac{1}{\omega_0}$:

$$\Sigma \sin(n\beta\psi)\sin(n\beta\omega); \qquad \Sigma e^{in\beta\pi}\sin(n\beta\psi)\sin(n\beta\omega).$$

La somme des premiers termes de ces séries se calcule aisément; la somme:

$$\Sigma \cos p\eta$$

où $2p$ prend toutes les valeurs impaires depuis 1 jusqu'à $2n$ est évidemment:

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\eta}{\sin\frac{1}{2}\eta}$$

et plus généralement la somme

$$\Sigma e^{ip\xi}\cos p\eta$$

est égale à

$$\frac{e^{i(n+1)(\xi+\eta)} - e^{\frac{i}{2}(\xi+\eta)}}{e^{i(\xi+\eta)} - 1} + \frac{e^{i(n+1)(\xi-\eta)} - e^{\frac{i}{2}(\xi-\eta)}}{e^{i(\xi-\eta)} - 1}$$

ou

$$h(\xi + \eta) + h(\xi - \eta)$$

en désignant par $h(\xi + \eta)$ le premier terme de l'expression précédente.

On aura alors:

$$(11) \quad 2\Sigma \sin(p\beta\psi)\sin(p\beta\omega) = h(\beta\psi - \beta\omega) + h(\beta\omega - \beta\psi) - h(\beta\omega + \beta\psi) - h(-\beta\omega - \beta\psi)$$

et

$$(12) \qquad 2\Sigma \sin(p\beta\psi)\sin(p\beta\omega)e^{ip\beta\pi} = h(\beta\pi + \beta\psi - \beta\omega) + h(\beta\pi - \beta\psi + \beta\omega) - h(\beta\pi + \beta\psi + \beta\omega) - h(\beta\pi - \beta\psi - \beta\omega).$$

Or la fonction h peut se mettre sous la forme suivante:

$$(13) \qquad h(\xi) = \frac{-1}{2i\sin\frac{1}{2}\xi} + \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{2i\sin\frac{1}{2}\xi} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi}.$$

Le premier terme ne depend pas de n; mais les deux autres termes dépendent de n et ne tendent pas vers une limite déterminée quand n augmente indéfiniment. C'est de ces termes que provient la divergence de nos séries.

D'autre part $h(\xi)$ est fini, mais les deux premiers termes du second membre deviennent infinis pour $\xi = 0$.

Soit alors $f(\xi)$ une fonction quelconque qui reste finie; on aura:

$$\int f(\xi)h(\xi)d\xi = \int \frac{-f(\xi)d\xi}{2i\sin\frac{1}{2}\xi} + \int \frac{f\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\, d\xi}{2i\sin\frac{1}{2}\xi} + \int \frac{f\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\, d\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi}.$$

Les deux premières intégrales du second membre n'ont par elles-mêmes aucun sens, si o est compris dans le champ d'intégration, puisque la fonction sous le signe $\int$ devient infinie pour $\xi = 0$. Pour leur en donner un, nous conviendrons de prendre pour chacune d'elles la *valeur principale* de l'intégrale.

Alors la seconde intégrale tend vers o et la troisième vers $\pi f(0)$ quand n croît indéfiniment.

Reprenons la relation (12), divisons-la par $2\omega_0$ et écrivons-la sous la forme suivante:

$$S_1 = S_1' + S_1'' + S_1'''.$$

S_1 sera le premier membre de (12) divisé per $2\omega_0$, c'est à dire la série (10) dans le cas de $c = 0$ et des solutions de la première sorte.

Quant à S_1', S_1'', S_1''' on les formera de la façon suivante. Après avoir divisé le second membre de (12) par $2\omega_0$, on y remplacera chaque fonction h par sa valeur (13); alors S_1' sera ce que devient ce second membre quand on y remplace chaque fonction h par le 1er terme de sa valeur (13); S_1'' et S_1''' seront ce qu'il devient quand on y remplace chaque h par le 2d ou par le 3e terme de sa valeur (13).

Nous désignerons d'ailleurs par S_2, S_2', S_2'', S_2'''; $S_3, S_3', \ldots$; $S_4, S_4', \ldots$; les quantités analogues obtenues en supposant toujours $c = 0$, mais en considérant respectivement le cas des solutions de la 2e, de la 3e ou de la 4e sorte.

La formule (7) devient alors:

$$(7') \qquad F_1(\omega) = \int F(\psi) S_1' d\psi + \int F(\psi) S_1'' d\psi + \int F(\psi) S_1''' d\psi.$$

La première de ces intégrales est indépendante de n, la seconde tend vers 0 quand n croît indéfiniment et la troisième tend vers:

$$\frac{1}{4}[F(\omega - \pi) + F(\omega + \pi) - F(-\omega - \pi) - F(-\omega + \pi)].$$

Supposons maintenant $c > 0$ et appelons Σ_1 la somme des premiers termes de la série (10) de telle façon que la formule (7) devienne:

$$(7'') \qquad F_1(\omega) = \lim \int F(\psi) \Sigma_1 d\psi.$$

Pour aller plus loin, étudions comment se comportent les termes d'ordre élevé de la série Σ_1; ces termes dépendront d'une fonction M_n définie par l'équation:

$$M_n'' = M_n(\alpha^2 c^2 \cos^2 \omega - \alpha^2 k_n)$$

où k_n est une constante *très grande*.

Nous aurons alors une valeur approchée de M_n en remplaçant l'équation proposée par la suivante:

$$M_n'' = -\alpha^2 k_n M_n;$$

car le terme $\alpha^2 c^2 \cos^2 \omega$ est négligeable devant le terme $\alpha^2 k_n$.

On aura donc approximativement:

$$M_n = \frac{\sin \alpha \sqrt{k_n}\, \omega}{\alpha \sqrt{k_n}}.$$

Rendons-nous compte du degré de l'approximation. On voit que l'intégrale M_n dépend de c et peut être développée suivant les puissances croissantes de c^2. Le développement est d'ailleurs convergent quel que soit c^2 et quel que soit ω. En étudiant ensuite les divers termes de ce développement, on reconnaîtrait que la différence de M_n et de sa valeur approchée est de même ordre de grandeur que

$$\left(\frac{1}{a\sqrt{k_n}}\right)^2.$$

Maintenant k_n est défini par l'égalité

$$M_n(\omega_0) = 0.$$

Si M_n se réduisait à sa valeur approchée, cette équation donnerait

$$k_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2\omega_0^2},$$

et on verrait que l'erreur commise est encore de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$. En résumé on a:

$$M_n = \frac{\sin\frac{n\pi\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right)}$$

avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

Si on supposait $c = 0$, on aurait, comme nous l'avons vu

$$\theta_n = \pi\left(n\beta + \frac{1}{2}\right).$$

Ce sera encore là une valeur approchée de θ_n pour une grande valeur de k_n; je crois, sans l'avoir rigoureusement démontré, que l'erreur commise est encore de l'ordre de $\frac{1}{n}$ ou de $\frac{\log n}{n}$.

Donc le n^e terme de la série Σ_1 (c'est à dire de la série (10) où $c \gtrless 0$) diffère du terme correspondant de la série S_1 (c'est à dire de la série (10) où $c = 0$) d'une quantité qui est de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

Je dis qu'on peut en conclure que la série

$$\Sigma_1 - S_1$$

est convergente.

Et en effet le terme général peut se mettre sous la forme suivante:

$$H_n + H'_n$$

où H_n est une somme de termes de la forme suivante; chacun d'eux est le produit de trois facteurs: 1° $\frac{1}{n}$ ou $\frac{\log n}{n}$; 2° un coëfficient constant indépendant de n; 3° le sinus ou le cosinus de n fois un angle constant.

Quant à H'_n il est de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

Il résulte de là que ΣH_n est semi-convergente et $\Sigma H'_n$ absolument convergente.

Par conséquent $\Sigma_1 - S_1$ converge,

Reprenons la formule

$$(7'') \qquad F_1(\omega) = \lim \int F(\psi) \Sigma_1 d\psi;$$

elle peut s'écrire:

$$F_1(\omega) = \int F(\psi)(\Sigma_1 - S_1) d\psi + \lim \int F(\psi) S_1 d\psi$$

ou

$$F_1 = \int F(\Sigma_1 - S_1) d\psi + \int F S'_1 d\psi + \lim \int F(S''_1 + S'''_1) d\psi$$

ou

$$(14) \qquad F_1 = \int F(\psi)(\Sigma_1 - S_1 + S'_1) d\psi$$
$$+ \frac{1}{4}[F(\omega - \pi) + F(\omega + \pi) - F(-\omega - \pi) - F(-\omega + \pi)].$$

Dans le second membre de (14), le premier terme représente la lumière diffractée et le second représente la lumière réfléchie ou directement transmise.

Nous poserons:

$$A_1(\omega, \psi) = \Sigma_1 - S_1 + S'_1.$$

A_1 sera une fonction parfaitement définie de ω et de ψ, puisque S'_1 ne

dépend pas de n et que la série $\Sigma_1 - S_1$ est convergente; la lumière diffractée sera alors représentée par l'intégrale

$$(15)\qquad \int F(\psi)A_1(\omega\,,\,\psi)d\psi.$$

Nous représenterons par A_2, A_3, A_4 les fonctions formées avec les solutions de la 2[e], 3[e] ou 4[e] sortes comme A_1 l'est avec celles de la 1[ère] sorte.

Si $F(\psi)$ était une fonction paire de ψ, au lieu d'être une fonction impaire comme nous l'avons supposé jusqu'ici, la lumière diffractée serait représentée par l'intégrale:

$$(16)\qquad \int F(\psi)A_2(\omega\,,\,\psi)d\psi.$$

Si enfin $F(\psi)$ était quelconque, elle serait représentée par l'intégrale

$$(17)\qquad \int \frac{F(\psi)-F(-\psi)}{2}A_1 d\psi + \int \frac{F(\psi)+F(-\psi)}{2}A_2 d\psi.$$

Les formules (16) et (17) supposent comme la formule (15) que le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence.

Supposons que la lumière incidente se réduise à un faisceau extrêmement délié, compris entre les directions $\psi_0 - \varepsilon$ et $\psi_0 + \varepsilon$, et de telle façon que

$$\int_{\psi_0-\varepsilon}^{\psi_0+\varepsilon} F(\psi)d\psi = 1,$$

la lumière diffractée dans la direction ω sera représentée par la formule:

$$\frac{1}{2}[A_1(\omega\,,\,\psi_0) - A_1(\omega\,,\,-\psi_0) + A_2(\omega\,,\,\psi_0) + A_2(\omega\,,\,-\psi_0)]$$

ou puisque A_1 est une fonction impaire et A_2 une fonction paire de ψ_0:

$$(18)\qquad A_1(\omega\,,\,\psi_0) + A_2(\omega\,,\,\psi_0).$$

Si le plan de polarisation était perpendiculaire au plan d'incidence, la lumière diffractée serait représentée par la formule

$$(19)\qquad A_3(\omega\,,\,\psi_0) + A_4(\omega\,,\,\psi_0).$$

Je m'arrête, bien que ces résultats soient bien incomplets; je chercherai,

dans la suite de ce travail, à combler les lacunes qui y subsistent; mais je voudrais, avant de passer outre, examiner plus en détail ce qui arrive quand $\alpha^2 c^2$ est un très grand nombre; et en effet si c est seulement d'un centième de millimètre; $\alpha^2 c^2$ peut être égal à 16000.

Reprenons l'équation:

$$M'' = M(\alpha^2 c^2 \cos^2 \omega - \alpha^2 k) \tag{1}$$

et posons:

$$z = \frac{M'}{M},$$

il viendra:

$$z' + z^2 = \alpha^2 c^2 \cos^2 \omega - \alpha^2 k.$$

Le second membre étant très grand, z est très grand et par conséquent on aura une intégrale approchée de l'équation en négligeant z' devant z^2, ce qui donne:

$$z = \alpha \sqrt{c^2 \cos^2 \omega - k}.$$

Posons alors:

$$y = \alpha \int_0^\omega \sqrt{c^2 \cos^2 \omega - k}\, d\omega;$$

nous aurons alors deux intégrales approchées de l'équation (1)

$$M = e^y, \qquad M = e^{-y}$$

et par conséquent nous pourrons écrire l'intégrale générale approchée de cette équation

$$M = Ae^y + Be^{-y},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Nous avons à distinguer la solution paire et la solution impaire; pour cela observons que y est une fonction impaire de ω; alors nous prendrons pour la solution paire:

$$M = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

et pour la solution impaire:

$$M = \frac{e^y - e^{-y}}{2\alpha\sqrt{c^2 - k}}.$$

Dans le cas des solutions de la 1ère et de la 2de sorte, le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence et on doit avoir:

$$M(\omega_0) = 0,$$

de sorte que l'équation (A_1) prend la forme

$$e^{2y} = 1$$

ou:

$$(A_1) \qquad \alpha\int_0^{\omega_0}\sqrt{c^2\cos^2\omega - k}\,d\omega = mi\pi \qquad (m \text{ entier}).$$

De même l'équation (A_2) prend la forme:

$$e^{2y} = -1$$

ou

$$(A_2) \qquad \alpha\int_0^{\omega_0}\sqrt{c^2\cos^2\omega - k}\,d\omega = \frac{2m+1}{2}i\pi \qquad (m \text{ entier}).$$

Dans l'un et l'autre cas la valeur de l'intégrale doit être purement imaginaire, ce qui montre que $c^2\cos^2\omega - k$ ne peut jamais être positif, d'où:

$$k > c^2.$$

Il serait aisé de former les équations (A_3) et (A_4); je me bornerai à rappeler que leurs racines sont séparées par celles de (A_1) et (A_2); toutes les valeurs de k, sauf peut-être deux d'entre elles, doivent donc être plus grandes que c^2.

L'approximation ne sera convenable que si la partie imaginaire de ω n'est pas très grande, ce qui empêche de déterminer facilement θ_n.

XI.

Nous avons jusqu'ici supposé qu'on avait affaire à des ondes cylindriques; voyons comment les résultats seront modifiées si nous supposons que la lumière est concentrée par une lentille *sphérique* en un *point* du tranchant du biseau.

Nous adopterons d'ailleurs les hypothèses les plus simples, c'est à dire que nous supposerons l'écran réduit à un demi plan mathématique et parfaitement conducteur et la lentille bien mise au point sur le bord de cet écran.

Reprenons l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+\alpha^2V=0 \tag{1}$$

à laquelle doivent satisfaire la composante Z de la force électrique, et la composante γ de la force magnétique. (Rapprocher de l'équation (2), page 306 de la 1ère partie de ce travail.)

Passons aux coordonnées polaires en posant:

$$x=\rho\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2},$$

$$y=\rho\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2},$$

$$z=\rho\mu.$$

Nous prenons, bien entendu, pour axe des z le bord de l'écran, et pour origine le point où la lumière est concentrée par la lentille.

Notre équation devient alors:

$$\frac{d^2V}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dV}{d\rho}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{\rho^2d\varphi^2}+\frac{1-\mu^2}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}-\frac{2\mu}{\rho^2}\frac{dV}{d\mu}+\alpha^2V=0. \tag{2}$$

L'écran a pour équation $\varphi=0$ ou $\varphi=2\pi$.

La fonction V, quelle qu'elle soit, sera développable en série trigonométrique procédant suivant les sinus ou les cosinus de

$$\frac{m\varphi}{2},$$

m étant entier.

S'il n'y avait pas d'écran, le développement ne devrait contenir que des termes où m est pair.

S'il y a un écran et si le plan de polarisation est dans le plan d'incidence, on doit prendre $V = Z$ et Z doit s'annuler pour $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$. Le développement ne contiendra donc que des sinus, m pouvant être pair ou impair (*c'est l'hypothèse à laquelle nous nous restreindrons, pour plus de brièveté*).

Si le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence, on doit prendre $V = \gamma$ et $\frac{dV}{dn}$ doit s'annuler pour $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$. Le développement ne contiendra donc que des cosinus, m pouvant être pair ou impair.

Revenons à l'hypothèse, $V = Z$, $Z = 0$ pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$. Soit

$$A \sin \frac{m\varphi}{2}$$

l'un des termes du développement. Nous serons conduits à supposer que A est de la forme suivante

$$RM,$$

R étant fonction de ρ seulement et M de μ seulement.

Cherchons donc la condition pour que

$$V = RM \sin \frac{m\varphi}{2}$$

satisfasse à l'équation (2).

Cette équation se décomposera en deux autres

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \alpha^2 R + \frac{bR}{\rho^2} = 0, \tag{3}$$

$$(1 - \mu^2)^2 \frac{d^2M}{d\mu^2} - 2\mu(1 - \mu^2)\frac{dM}{d\mu} - bM(1 - \mu^2) - \frac{m^2}{4} M = 0; \tag{4}$$

b est une constante arbitraire.

Etudions d'abord l'équation (4).

Elle admet deux intégrales procédant suivant les puissances croissantes de $\mu - 1$, les exposants augmentant d'une unité à chaque terme; l'un des développements commence par un terme en $(\mu - 1)^{\frac{m}{4}}$, l'autre

par un terme en $(\mu - 1)^{-\frac{m}{4}}$; cette dernière si m est pair peut être remplacée par une intégrale dont le développement contient des logarithmes. De même nous aurons deux intégrales procédant suivant les puissances de $\mu + 1$; l'un des développements commencera par un terme en $(\mu + 1)^{\frac{m}{4}}$, l'autre par un terme en $(\mu + 1)^{-\frac{m}{4}}$. Cette dernière si m est pair peut être remplacée par une intégrale dont le développement contient des logarithmes. Pour qu'une intégrale convienne, il faut qu'elle ne devienne infinie, ni pour $\mu = 1$, ni pour $\mu = -1$.

Il faut donc que ce soit la *même* intégrale dont le développement suivant les puissances de $\mu + 1$ commence par $(\mu + 1)^{\frac{m}{4}}$ et dont le développement suivant celles de $\mu - 1$ commence par $(\mu - 1)^{\frac{m}{4}}$.

Dans ce cas la fonction

$$M(\mu^2 - 1)^{-\frac{m}{4}} = P \tag{5}$$

devra être holomorphe dans tout le plan. Comme d'autre part toute intégrale de l'équation (4) doit être développable pour μ assez grand suivant les puissances croissantes, entières ou fractionnaires de $\frac{1}{\mu}$, P doit admettre ce mode de développement; or les seules fonctions holomorphes qui jouissent de cette propriété sont les polynômes entiers.

Donc P est un polynôme entier; soit n son degré; alors le développement de P suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\mu}$ commencera par un terme en μ^n, d'où

$$b = -\left(\frac{m}{2} + n\right)\left(\frac{m}{2} + n + 1\right).$$

Si m est pair, l'expression

$$M \sin \frac{m\varphi}{2}$$

n'est autre chose qu'une fonction sphérique ordinaire. L'équation (3) s'intègre très aisément; si nous posons

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{4} - b} - \frac{m+1}{2} + n.$$

on trouve:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\rho}} J_\lambda(\alpha\rho).$$

Les autres intégrales de (3) deviennent infinies pour $\rho = 0$.

L'expression approchée de R pour ρ très grand est donc:

$$\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\cos\left(\alpha\rho - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Nous aurons donc pour ρ très grand:

$$Z = \sum A_{m.n}\sin\frac{m\varphi}{2}(\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} P_{m.n}\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\frac{1}{\rho}\cos\left(\alpha\rho - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$P_{m.n}$ étant le polynôme P défini par l'équation (5) et les $A_{m.n}$ étant des coëfficients indépendants de ρ, de φ et de μ et linéaires en $\cos pt$ et $\sin pt$.

Nous pourrons d'ailleurs, comme à la page 309 de la 1ère partie, séparer les différents faisceaux et écrire:

$$Z = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}\sum B_{m.n}\sin\frac{m\varphi}{2}(\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} P_{m.n}\cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right)$$

pour le faisceau incident et

$$Z = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}\sum C_{m.n}\sin\frac{m\varphi}{2}(\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} P_{m.n}\cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$$
$$+ \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}\sum D_{m.n}\sin\frac{m\varphi}{2}(\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} P_{m.n}\sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$$

pour les faisceaux divergents.

Si nous égalons les coëfficients, il viendra:

$$A_{m.n}\cos\frac{\lambda\pi}{2} = B_{m.n}\cos pt + C_{m.n}\cos pt - D_{m.n}\sin pt,$$

$$A_{m.n}\sin\frac{\lambda\pi}{2} = - B_{m.n}\sin pt + C_{m.n}\sin pt + D_{m.n}\cos pt$$

d'où:

$$(6)\quad \left.\begin{array}{l} \text{si } m + 1 + 2n \equiv 0 \\ \text{si } m + 1 + 2n \equiv 1 \\ \text{si } m + 1 + 2n \equiv 2 \\ \text{si } m + 1 + 2n \equiv 3 \end{array}\right\} \text{mod } 4. \qquad \begin{array}{ll} B_{m.n} = C_{m.n}, & D_{m.n} = 0, \\ B_{m.n} = D_{m.n}, & C_{m.n} = 0, \\ B_{m.n} = - C_{m.n}, & D_{m.n} = 0, \\ B_{m.n} = - D_{m.n}, & C_{m.n} = 0. \end{array}$$

Nous distinguerons d'abord le cas où tout est symétrique par rapport au plan des xy; c'est à dire où on ne change rien en changeant μ en $-\mu$. C'est le cas des expériences de M. GOUY où l'axe du microscope se meut dans un plan perpendiculaire au bord de l'écran.

Le polynôme $P_{m,n}$ est une fonction paire de μ si n est pair et une fonction impaire de μ si n est impair.

Dans le cas auquel nous nous restreignons, nous n'aurons donc que des termes où n est pair.

Nous aurons donc si:

$$m \equiv 0, \quad B = D, \quad C = 0,$$
$$m \equiv 1, \quad B = -C, \quad D = 0,$$
$$m \equiv 2, \quad B = -D, \quad C = 0,$$
$$m \equiv 3, \quad B = C, \quad D = 0.$$

Dans le § III nous avions trouvé

$$m \equiv 0, \quad B = C, \quad D = 0,$$
$$m \equiv 1, \quad B = D, \quad C = 0,$$
$$m \equiv 2, \quad B = -C, \quad D = 0,$$
$$m \equiv 3, \quad B = -D, \quad C = 0.$$

Nous retrouvons donc le même résultat que dans ce § III, mais en changeant C en D et D en $-C$. La lumière diffractée se comportera donc comme dans le cas du § III, mais avec une différence de phase égale à $\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant que le champ possède une symétrie telle que Z se change en $-Z$ quand on change μ en $-\mu$; alors nous n'aurons que des termes où n sera impair; il vient alors si

$$m \equiv 0, \quad B = -D, \quad C = 0,$$
$$m \equiv 1, \quad B = C, \quad D = 0,$$
$$m \equiv 2, \quad B = D, \quad C = 0,$$
$$m \equiv 3, \quad B = -C, \quad D = 0.$$

Nous retrouvons encore les résultats du § III, en y changeant C en $-D$ et D en C. La lumière diffractée se comporte donc encore comme dans le cas du § III, mais avec une différence de phase égale à $-\frac{\pi}{2}$.

Si nous passons maintenant au cas général, nous pourrons toujours considérer le faisceau incident comme la superposition de deux autres, dont le premier admettra le premier genre de symétrie, (c'est à dire sera tel que Z ne change pas quand μ se change en $-\mu$) et dont le second admettra le second genre de symétrie (c'est à dire sera tel que Z se change en $-Z$ quand μ se change en $-\mu$). On étudiera donc séparément les effets de ces deux faisceaux, ainsi que je l'ai dit plus haut, et on n'aura plus ensuite qu'à les combiner.

Supposons que les rayons incidents forment un faisceau extrêmement délié, de telle façon que l'intensité de la lumière incidente soit nulle toutes les fois que μ et φ ne satisfont pas aux inégalités

$$\mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0 + \varepsilon; \qquad \varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon,$$

μ_0 et φ_0 étant deux constantes données et ε une constante très petite.

Posons pour abréger:

$$B_m = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_{m.n} P_{m.n}, \qquad C_m = \Sigma C_{m.n} P_{m.n}, \qquad D_m = \Sigma D_{m.n} P_{m.n}$$

d'où pour le faisceau incident:

$$Z = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum B_m \sin\frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right)$$

et pour les autres faisceaux

$$Z = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum C_m \sin\frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$$

$$+ \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum D_m \sin\frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right).$$

On devra alors avoir $B_m = 0$, pour toutes les valeurs de m, à moins que

$$\mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0 + \varepsilon.$$

B_m est une fonction de μ. On a

$$B_m(\mu) + B_m(-\mu) = 2\sum{}' B_{m.n} P_{m.n},$$

la sommation du second membre, indiquée par le signe $\sum'$, ne s'étendant qu'aux valeurs paires de n. Les deux membres de l'égalité (7) doivent s'annuler à moins que l'on n'ait

$$(8) \qquad \mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0 + \varepsilon; \quad \text{ou} \quad -\mu_0 - \varepsilon < \mu < -\mu_0 + \varepsilon.$$

On en conclut à l'aide des égalités (6) que l'on doit avoir:

$$2\sum{}' C_{m.n} P_{m.n} = 2\sum{}' D_{m.n} P_{m.n} = 0,$$

à moins que l'une des deux inégalités (8) ne soit satisfaite.

De même on aura:

$$(7') \qquad B_m(\mu) - B_m(-\mu) = 2\sum{}'' B_{m.n} P_{m.n},$$

la sommation indiquée par le signe $\sum''$ s'étendant aux valeurs impaires de n. Les deux membres de (7′) s'annulent, si l'une des deux inégalités (8) n'est pas satisfaite. On en conclut

$$2\sum{}'' C_{m.n} P_{m.n} = 2\sum{}'' D_{m.n} P_{m.n} = 0.$$

On aura donc:

$$C_m = D_m = 0,$$

à moins que l'une des inégalités (8) ne soit satisfaite. Cela veut dire que la lumière diffractée sera répartie sur un cône de révolution ayant pour axe l'axe des z et sur le prolongement de ce cône. C'est d'ailleurs sur ce même cône que se trouve le faisceau incident.

Je ne crois pas que l'on ait fait d'expérience avec le faisceau incident oblique au bord de l'écran. Il serait curieux de vérifier dans quelle mesure la conclusion simple qui précède est confirmée par l'expérience, malgré les irrégularités du tranchant du biseau et bien que les conditions théoriques où nous nous sommes supposés placés dans ce paragraphe soient beaucoup plus simples que les conditions réelles.

SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR

EMILE BOREL

à PARIS.

La découverte par M. Weierstrass de la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires, a donné une importance particulière à l'étude de la distribution de leurs zéros. La notion de genre, introduite par Laguerre et intimement liée à cette distribution, s'est rapidement révélée comme fondamentale; nous verrons qu'une notion analogue, mais en quelque mesure plus précise, celle de l'*ordre*, peut aussi rendre des services.

C'est M. Poincaré qui a fait le premier cette remarque capitale, que le genre d'une fonction entière est en relation étroite avec l'ordre de grandeur de la fonction pour les grandes valeurs de la variable; dans un mémoire fondamental,[1] M. Hadamard a complété sur plusieurs points les résultats de M. Poincaré. Il a notamment montré que la connaissance de l'ordre de grandeur de la fonction permet de fixer une limite supérieure du nombre de ses zéros inférieurs à un nombre donné. Mais, sauf le cas très particulier des fonctions de genre zéro, il a laissé de côté ce que l'on peut appeler la réciproque de cette proposition, c'est à dire la question de savoir si le nombre des zéros atteint effectivement cette limite supérieure. La principale difficulté de cette recherche était due à ce fait qu'il existe des fonctions entières, croissant aussi vite que l'on veut, et n'ayant aucun zéro; on ne pouvait donc espérer que la réciproque

[1] Journal de mathématiques pures et appliquées 1893.

dont nous venons de parler serait vraie d'une manière absolue; mais un théorème remarquable, dû à M. PICARD, qui l'a découvert en 1880 par une voie indirecte, indiquait dans quelle direction on pouvait espérer aboutir. C'est, en effet, en généralisant ce théorème d'une manière convenable, après en avoir donné une démonstration directe, que j'ai pu indiquer la véritable relation entre l'ordre de grandeur des fonctions entières et le nombre de leurs zéros: désignons par G une fonction entière donnée et par φ une fonction entière quelconque croissant beaucoup moins rapidement que G; parmi les équations de la forme

$$\varphi_1(z)G(z) = \varphi_2(z)$$

il y en a au plus une dont le nombre des racines soit notablement inférieur à la limite supérieure qu'on obtient en précisant convenablement un résultat de M. HADAMARD.

Ce travail est divisé en deux parties. Dans la première, prenant pour point de départ les résultats de MM. POINCARÉ et HADAMARD, je les complète sur quelques points et les précise notamment en introduisant, au lieu du genre, l'*ordre*, qui est un nombre ρ ainsi défini: a_n étant le module de la $n^{\text{ième}}$ racine, la série $\sum \frac{1}{a_n^{\rho+\varepsilon}}$ est convergente et la série $\sum \frac{1}{a_n^{\rho-\varepsilon}}$ est divergente, quelque petit que soit ε. Pour le cas où le genre est infini, j'indique la très grande importance qu'il y a à ne pas augmenter le degré des polynomes qui figurent en exposant dans les facteurs primaires, plus qu'il n'est strictement nécessaire pour assurer la convergence. On peut ainsi étendre aux produits de facteurs primaires la propriété essentielle des exponentielles $e^{G(z)}$, qui peut s'énoncer ainsi: lorsque le module de z augmente indéfiniment, les plus grandes valeurs du module de la fonction d'une part, et les inverses des plus petites valeurs de ce module d'autre part, sont sensiblement du même ordre de grandeur. Ces remarques jouent un rôle essentiel dans la deuxième partie, qui est consacrée au théorème de M. PICARD et à sa généralisation; cette deuxième partie se termine par une nouvelle rédaction de la première démonstration que j'ai donnée de ce théorème dans les Comptes Rendus, démonstration que, sur la demande qu'a bien voulu me faire M. MITTAG-LEFFLER, j'ai développée dans tous ses détails. Je l'ai fait d'autant plus

volontiers, que cela m'a paru une occasion de donner un exemple de procédés de raisonnement qui permettront sans peine au lecteur de compléter certaines démonstrations que j'ai dû abréger.

Enfin, en terminant, j'indique quelques sujets de recherches dont l'un est étroitement lié avec la formule donnée par Riemann, pour déterminer le nombre des racines de la fonction $\xi(t)$, dans son célèbre mémoire sur la fonction $\zeta(s)$. En admettant, en effet, une proposition générale que je n'ai réussi qu'à rendre probable, on trouve immédiatement, pour le nombre des racines de $\xi(t)$ inférieures à un nombre donné, la formule même de Riemann.

PREMIÈRE PARTIE.

La décomposition en facteurs primaires.

Suivant l'usage, nous appellerons facteur primaire l'expression $F_p(u)$ définie par l'égalité:

$$F_p(u) = (1 - u)e^{\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}};$$

on sait que, si une fonction entière $G(z)$ admet les zéros $z = a_n$ et si la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ est convergente, on a

$$G(z) = e^{H(z)} \prod F_p\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

$H(z)$ étant une fonction entière. On choisit d'ailleurs en général pour p *le plus petit* nombre tel que la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ soit convergente. Nous verrons qu'il est *essentiel* de procéder ainsi, sous peine de masquer complètement les propriétés de la fonction. Lorsqu'il n'existe pas de nombre fixe p tel que la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ soit convergente, on est conduit à prendre

pour p une fonction croissante de n. On pose généralement $p = n$, c'est à dire que l'on forme le produit

$$\prod F_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Il est manifeste que cette valeur de p est beaucoup trop grande; il suffit évidemment de prendre $p + 1 \geqq \log n > p$; car on a

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\log n}} = \sum \frac{1}{n^{\log |a_n|}}$$

et le nombre des a_n dont le module est inférieur à e^2 étant en nombre limité, les termes de la série qui figure dans le second membre sont, à partir d'un certain rang, inférieurs à ceux de la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$. Il suffirait, en supposant les a_n rangés par modules croissants, de prendre pour p l'entier le plus voisin du nombre p' défini par l'égalité

$$|a_n^{p'}| = n^2.$$

Nous voyons que le nombre p croît certainement moins vite que $\log n$ et que la série $\sum \frac{1}{a_n^p}$ est comparable à la série $\sum \frac{1}{n^2}$; lorsque la *densité* des racines sera très grande, nous aurons intérêt à prendre $p = (\log n)^{1+\varepsilon}$.

Nous allons nous borner d'abord au cas où p est une constante et où $H(z)$ est un polynome; si son degré est q, on appelle genre de la fonction le plus grand des deux entiers p et q. Nous introduisons un nombre ρ défini par la condition que la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$ soit convergente et la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$ divergente, quelque petit que soit le nombre positif ε. Lorsque ρ n'est pas entier, p est égal à la partie entière de ρ; si ρ est entier, p peut être égal à ρ où à $\rho - 1$; ce dernier cas présente des difficultés spéciales, analogues à celles qui se rencontrent dans la recherche d'un criterium général de convergence; ρ sera dit *l'ordre* de la fonction.

Nous allons étudier séparément le produit de facteurs primaires et le facteur exponentiel. Considérons d'abord un produit de facteurs primaires dont l'ordre ρ n'est pas entier et a p pour partie entière:

$$G(z) = \prod F_p\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Dans le mémoire déjà cité, M. HADAMARD a démontré que l'on pouvait trouver une suite de nombres R croissant au delà de toute limite [1] et tels que pour $|z| = R$, l'on ait

$$|G(z)| > e^{-R^{\rho+\varepsilon}},$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Nous allons montrer, d'autre part, que, pour les valeurs suffisamment grandes de R, la limite supérieure du module de $G(z)$ (lorsque $|z| = R$) est comprise entre $e^{R^{\rho-\varepsilon}}$ et $e^{R^{\rho+\varepsilon}}$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Supposons, en effet, que le module de x soit égal à R et considérons d'abord les facteurs pour lesquels $|a_n| > R$; le logarithme de l'un quelconque d'entre eux est

$$-\frac{x^{p+1}}{(p+1)a_n^{p+1}} - \frac{x^{p+2}}{(p+2)a_n^{p+2}} - \ldots.$$

On a d'ailleurs sensiblement $|a_n| = n^{\frac{1}{\rho}}$ et $p < \rho < p + 1$. On en conclut, en remplaçant, s'il est nécessaire, ρ par $\rho + \varepsilon$,

$$\sum_n^\infty \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \int_n^\infty \frac{dn}{n^{\frac{p+1}{\rho}}} = \frac{\rho}{p+1-\rho} n^{1-\frac{p+1}{\rho}}.$$

Donc, si $|x| = R$ et $|a_n| \geqq R = n^{\frac{1}{\rho}}$, on a

$$\sum_n^\infty \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)|a_n^{p+1}|} < \frac{\rho}{(p+1-\rho)(p+1)} R^{\rho}.$$

De même

$$\sum_n^\infty \frac{|x|^{p+2}}{(p+2)|a_n|^{p+2}} < \frac{\rho}{(p+2-\rho)(p+2)} R^{\rho}.$$

On en conclut immédiatement que la somme des logarithmes des facteurs pour lesquels $|a_n| \geqq R$ est inférieure à KR^{ρ}. Quand aux autres facteurs,

---

[1] Nous ajouterons que l'on peut aisément, en modifiant légèrement la démonstration de M. HADAMARD, affirmer que, η étant un nombre positif donné plus petit que un, les rayons de ces cercles compris dans un intervalle A suffisamment grand peuvent être pris quelconques dans une série d'intervalles d'étendue totale supérieure à ηA.

il est aisé d'en calculer le produit, puisque leur nombre est limité; ce produit est:

$$\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{x\sum\limits_1^n\frac{1}{a_i}+\frac{x^2}{2}\sum\limits_1^n\frac{1}{a_i^2}+\cdots+\frac{x^p}{p}\sum\limits_1^n\frac{1}{a_i^p}}$$

et un calcul facile montre que chacun de ses facteurs, en vertu des hypothèses faites sur les a_n, est inférieur à $e^{R^{\rho+\varepsilon}}$. Rappelons que $|a_n|$ est égal à R et que a_m est comparable à $m^{\frac{1}{\rho}}$. Par exemple le produit des facteurs binomes a un module inférieur à $R^n = R^{R^\rho} = e^{R^\rho \log R}$ et, quelque petit que soit ε, cette expression est, pour R suffisamment grand, inférieure à $e^{R^{\rho+\varepsilon}}$.

D'ailleurs la fonction $G(z)$ ne peut pas croître moins vite que $e^{R^{\rho'}}$, ρ' étant un nombre fixe inférieur à ρ car, d'après les formules de M. Hadamard, il en résulterait que son *ordre* est au plus égal à ρ' et par suite ne peut atteindre ρ. Nous arrivons donc à la conclusion suivante, qui s'étendrait sans peine au cas où ρ est entier, que nous avons écarté pour plus de netteté[1]: Etant donnée une fonction entière d'ordre ρ, son module maximum croît comme e^{R^ρ} et, d'autre part, on peut trouver des cercles de rayons croissants R sur lesquels son minimum soit supérieur à e^{-R^ρ}, *c'est à dire à l'inverse du maximum.* Ces mots soulignés constituent pour nous le résultat principal; nous verrons qu'il s'étend, à quelques modifications près, à toutes les fonctions entières. Un cas intéressant est celui où $\rho = 0$; c'est ce qui a lieu si l'on a par exemple $a_n = n!$; il se traite aisément directement et nous ne nous y arrêterons pas.

Il est à peine besoin d'ajouter que les mêmes conclusions s'appliquent à une exponentielle de la forme $e^{H(z)}$ dans laquelle $H(z)$ est un polynome de degré q; il est clair que les plus grandes valeurs de la fonction sont comparables à e^{R^q} et les plus petites à e^{-R^q}.

D'après cela, considérons une fonction entière $G(z)$ qui croisse aussi rapidement que e^{R^ρ}; nous dirons que ρ est *l'ordre apparent* de la fonction. Si ρ n'est pas un entier, *l'ordre réel est égal à l'ordre apparent,* c'est à

[1] Il y aurait lieu, dans ce cas, d'écrire le produit des facteurs primaires comme si la fonction était de genre $p = \rho$, même si elle était de genre $p - 1$.

dire que l'équation $G(z) = 0$ a des racines précisément en nombre tel que la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$ soit divergente et la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$ convergente. En effet, s'il n'en était pas ainsi, la fonction serait de la forme

$$e^{H(z)}G_1(z),$$

l'ordre ρ' de $G_1(z)$ étant inférieur à ρ. Si le degré de $H(z)$ est inférieur à ρ, cette expression croît beaucoup moins vite que e^{R^ρ} et si le degré de $H(z)$ est supérieur à ρ elle croît plus vite, comme on le voit aisément d'après ce que nous savons sur le minimum de $G_1(z)$ sur des cercles de rayons croissants.

D'ailleurs si $P(z)$ est une fonction entière d'ordre apparent inférieur à ρ, la fonction $G(z) - P(z)$ a encore ρ pour ordre apparent et par suite pour ordre réel, c'est à dire que la densité des racines de l'équation

$$G(z) = P(z)$$

est la même que celle des racines de l'équation

$$G(z) = 0.$$

Il en serait d'ailleurs évidemment de même pour l'équation

$$P_0(z)[G(z)]^n + P_1(z)[G(z)]^{n+1} + \dots + P_n(z) = 0$$

dans laquelle les P sont d'ordre apparent inférieur à ρ: car son premier membre est évidemment d'ordre apparent ρ.

Dans le cas où ρ est un nombre entier ces conclusions ne subsistent pas, mais nous pouvons affirmer que, si $P(z)$ est une fonction quelconque d'ordre apparent inférieur à ρ, l'une au plus des fonctions $G(z) - P(z)$ a un ordre réel inférieur à ρ. Supposons en effet que l'on ait

$$G(z) - P(z) = G_1(z)e^{H_1(z)},$$

$$G(z) - Q(z) = G_2(z)e^{H_2(z)},$$

l'ordre des fonctions P, Q, G_1, G_2 étant inférieur à un nombre $\rho' < \rho$.

$G(z)$ étant d'ordre apparent ρ, $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sont des polynomes de degré ρ et l'on a

$$(1) \qquad e^{H_1(z)}G_1(z) - e^{H_2(z)}G_2(z) = Q(z) - P(z),$$

$$(2) \qquad e^{H_1(z)}[G_1(z) - e^{H_2(z)-H_1(z)}G_2(z)] = Q(z) - P(z).$$

Si le degré de $H_2(z) - H_1(z)$ était inférieur à ρ, la quantité entre crochets serait d'ordre apparent inférieur à ρ et par suite le premier membre serait d'ordre ρ comme le facteur $e^{H_1(z)}$, ce qui est absurde puisque le second membre est d'ordre inférieur à ρ. Cela posé, reprenons l'égalité (1) et écrivons-la, en posant $Q - P = R$,

$$\frac{G_1(z)}{R(z)}e^{H_1(z)} - \frac{G_2(z)}{R(z)}e^{H_2(z)} = 1.$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport à z; nous aurons:

$$[G_1'R - G_1R' + G_1RH_1']e^{H_1(z)} - [G_2'R - G_2R' + G_2RH_2']e^{H_2(z)} = 0,$$

c'est à dire une relation de la forme:

$$M(z) + N(z)e^{H_2(z)-H_1(z)} = 0,$$

M et N sont des fonctions d'ordre évidemment inférieur à ρ et qu'on s'assure immédiatement n'être pas identiquement nulles

$$\left[\text{si } M = 0, \frac{G_1'}{G_1} - \frac{R'}{R} + H_1' = 0, \text{ etc.}\right]$$

d'autre part nous avons vu que $H_2 - H_1$ était bien de degré ρ; donc cette égalité est impossible. L'on démontrerait d'une manière analogue l'impossibilité de l'existence de plus d'une fonction de la forme

$$P_0(z)[G(z)]^n + \ldots + P_n(z)$$

dont l'ordre soit inférieur à ρ, l'ordre des P étant inférieur à ρ. Mais nous nous étendrons davantage sur ce sujet dans la deuxième partie, ainsi que sur le fait que nous avons admis implicitement: une fonction et sa dérivée ont même ordre apparent.

Nous allons maintenant nous occuper des fonctions dont l'ordre est infini; nous étudierons d'abord les exponentielles de la forme $e^{G(z)}$.

Nous allons voir qu'en désignant par $\varphi(r)$ le maximum du module de $e^{G(z)}$ lorsque $|z| \overline{\overline{<}} r$ et par $\psi(r)$ l'inverse du minimum dans les mêmes conditions[1], l'on a, pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment

$$[\log\varphi(r)]^\alpha < \log\psi(r) < [\log\varphi(r)]^\beta$$

α étant un nombre quelconque plus petit que *un* et β un nombre quelconque plus grand que *un*. Posons en effet $z = re^{i\theta}$ et

$$G(z) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta) = a_0 + ia'_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m + \ldots,$$

P et Q étant réels ainsi que a_0 et a'_0. Désignons d'ailleurs par $A(r)$ la plus grande valeur positive de P pour $|z| = r$ et par $B(r)$ la plus grande valeur positive de $-P$ dans les mêmes conditions; on a $\log\varphi(r) = A$ et $\log\psi(r) = B$, de sorte que la proposition à démontrer devient

$$[A(r)]^\alpha < B(r) < [A(r)]^\beta$$

il suffit d'ailleurs démontrer l'une de ces inégalités car elles se ramènent évidemment l'une à l'autre en changeant G en $-G$, ce qui permute A et B.

Or on a manifestement:

$$\pi r^m a_m = \int_0^{2\pi} P(r, \theta) e^{-im\theta} d\theta,$$

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} P d\theta$$

et par suite

$$\pi r^m |a_m| < \int_0^{2\pi} |P| d\theta,$$

$$\pi r^m |a_m| + 2\pi a_0 < \int_0^{2\pi} (|P| + P) d\theta < 4\pi A(r).$$

Donnons maintenant au module de z une valeur ρ inférieure à r; nous aurons évidemment

$$B(\rho) < |a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_m|\rho^m + \ldots,$$

[1] On sait d'ailleurs que ce maximum et ce minimum sont atteints pour une valeur de z dont le module est r.

d'où, en se servant de la dernière inégalité,

$$B(\rho) < |a_0| + [4A(r) + 2|a_0|]\left(\frac{\rho}{r} + \frac{\rho^2}{r^2} + \ldots + \frac{\rho^m}{r^m} + \ldots\right)$$

Le nombre a_0 étant donné, nous pouvons supposer r assez grand pour que $A(r)$ soit grand par rapport à a_0 et nous pourrons écrire alors

$$(1) \qquad B(\rho) < \frac{8\rho A(r)}{r - \rho}$$

cette inégalité ayant lieu pour toutes les valeurs de r dépassant une certaine limite, ρ pouvant avoir une valeur quelconque inférieure à r.

Nous allons montrer qu'on ne peut pas avoir pour toutes les valeurs de r dépassant un nombre donné [1]

$$(2) \qquad B(r) > [A(r)]^2;$$

on verrait aisément d'ailleurs que l'exposant 2 pourrait être remplacé par un exposant quelconque supérieur à un. On déduit en effet de (1) et de (2):

$$[A(\rho)]^2 < \frac{8\rho A(r)}{r - \rho}$$

ce que l'on peut écrire en posant $r = \rho + \varepsilon$

$$(3) \qquad A(\rho + \varepsilon) > \varepsilon \frac{[A(\rho)]^2}{8\rho}$$

et cette inégalité serait vérifiée à partir d'une *valeur donnée* de ρ, pour *toute valeur positive* de ε. Nous allons voir que c'est impossible. Remplaçons, en effet, dans l'inégalité (3), ρ par $\rho + \varepsilon$ et $\rho + \varepsilon$ par $\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$; posons d'ailleurs $A(\rho) = A$ et $8(\rho + 2\varepsilon) = C$; nous aurons

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}\frac{[A(\rho + \varepsilon)]^2}{8(\rho + \varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}\frac{[A(\rho + \varepsilon)]^2}{C}$$

---

[1] Notre démonstration légèrement modifiée prouverait même qu'il n'est pas possible que cette inégalité soit vérifiée dans une série d'intervalles $[r_1 < r < r_2]$ tels que l'étendue totale de ceux de ces intervalles qui sont compris entre 0 et R reste, lorsque R croît, constamment supérieure à kR, k étant un nombre positif quelconque. Ce point aura de l'importance plus loin.

et comme l'on a

$$A(\rho + \varepsilon) > \varepsilon \frac{[A(\rho)]^2}{C},$$

on en conclut

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right) > \frac{\varepsilon}{2C} \cdot \frac{\varepsilon^2}{C^2} A^4.$$

Nous avons de même

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2}\right) > \frac{\varepsilon}{2^2} \frac{\left[A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^2}{C},$$

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2}\right) > \frac{\varepsilon}{2^2 . C} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^2 C^2} \cdot \frac{\varepsilon^{2^2}}{C^{2^2}} A^{2^3}.$$

On trouverait ensuite

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3}\right) > \frac{\varepsilon}{2^3 . C} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^{2\times 2} C^2} \cdot \frac{\varepsilon^{2^2}}{2^{2^2} C^{2^2}} \frac{\varepsilon^{2^3}}{C^{2^3}} A^{2^4},$$

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \frac{\varepsilon}{2^4}\right) > \frac{\varepsilon}{2^4 . C} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^{3\times 2} C^2} \cdot \frac{\varepsilon^{2^2}}{2^{2\times 2^2} C^{2^2}} \cdot \frac{\varepsilon^{2^3}}{2^{2^3} C^{2^3}} \frac{\varepsilon^{2^4}}{C^{2^4}} A^{2^5}$$

et enfin

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) > \frac{\varepsilon^{1+2+2^2+\ldots+2^n}}{2^{n+(n-1)2+(n-2)2^2+\ldots+2^{n-1}}} \frac{A^{2^{n+1}}}{C^{1+2+\ldots+2^n}}.$$

Les exposants de ε et de C sont inférieurs à 2^{n+1}; celui de 2 est inférieur à

$$2^n \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots\right]$$

on constate aisément que la série convergente qui est entre crochets a une somme inférieure à 4; et on a:

$$2^{4\times 2^n} = 4^{2^{n+1}}.$$

En supposant d'ailleurs $\varepsilon < 1$ et $C > 1$, on a enfin

$$A\left(\rho + 2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^n}\right) > \left(\frac{\varepsilon A}{4C}\right)^{2^{n+1}}.$$

Or il est clair que l'on peut supposer ρ et ε choisis de manière que

l'on ait $\frac{\varepsilon A}{4C} > 1$, c'est à dire $\varepsilon A(\rho) > 32(\rho + 2\varepsilon)$; on en conclut que $A(\rho + 2\varepsilon)$ dépasserait toute limite assignable, ce qui est évidemment absurde. Notre proposition est donc établie.

Nous allons maintenant étendre ce résultat à un produit de facteurs primaires d'ordre infini et montrer que l'on peut trouver une série de cercles de rayons indéfiniment croissants sur lesquels le maximum d'un tel produit est comparable à l'inverse de son minimum. Mais, avant d'aborder cette recherche, il est indispensable de préciser cet énoncé en présentant quelques remarques sur les fonctions positives croissantes.

Soit $X = F(x)$ une fonction positive croissante: la fonction inverse $x = f(X)$ est aussi une fonction positive croissante. Nous dirons que la fonction $F(x)$ est à croissance *très rapide* si, quelque soit le nombre des exponentielles superposées, l'on a, à partir d'une valeur de x suffisamment grande

$$F(x) > e^{e^{e^{\cdot^{\cdot}}}}.$$

La fonction inverse $f(X)$ sera dite alors à croissance très lente et l'on aura, à partir d'une valeur assez grande de X,

$$f(X) < \log\log\ldots\log X$$

quelque soit le nombre des signes *log* (il est bien clair que la valeur de X dépend du nombre de ces signes).

Nous ne nous occuperons que des fonctions à croissance très lente ou très rapide; les autres sont faciles à étudier directement.

Il s'agit tout d'abord de définir dans quel cas nous dirons que deux fonctions sont *du même ordre de grandeur* ou *croissent sensiblement de la même manière.* Nous allons voir qu'il est possible d'adopter pour ces expressions des définitions *extrêmement différentes*, de sorte qu'en se plaçant à des points de vue en apparence tout à fait légitimes, on pourrait se trouver conduit à adopter des définitions contradictoires. D'ailleurs il est bien clair que, du moment que l'on a suffisamment précisé la définition adoptée, on est libre de la choisir comme on le veut; et même de la varier suivant le genre de recherches auquel on se livre, pourvu qu'il n'y ait pas de confusion. Je ne prétends donc pas que la définition à laquelle je me suis arrêté soit *la meilleure;* celle que je vais indiquer en

premier lieu est peut être préférable dans certaines recherches; mais elle n'aurait, je crois, conduit à rien dans la question qui fait l'objet principal de ce mémoire. Je tiens cependant à la faire connaître, car son exposition nous fera pénétrer la nature des difficultés qui se présentent dans l'étude des fonctions à croissance très rapide.

Indiquons d'abord un procédé simple pour former de telles fonctions; posons

$$\varphi_0(x) = e^x, \qquad \varphi_1(x) = e^{\varphi_0(x)} \quad \ldots \ldots \quad \varphi_n(x) = e^{\varphi_{n-1}(x)} \quad \ldots$$

et désignons par α_n des nombres positifs croissant indéfiniment avec n. La série

$$F(x) = \sum \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(\alpha_n)}$$

évidemment convergente pour toute valeur de x, représente une fonction à croissance très rapide. Lorsque x est compris entre α_n et α_{n+1}, cette fonction est plus grande que $\varphi_{n-1}(\alpha_n)$, en supposant que α_n ne soit pas une fonction de x à croissance très lente; on a en effet

$$\varphi_n(x+\varepsilon) > \varphi_n(x) + \varepsilon\varphi_n'(x),$$

$$\frac{\varphi_n(\alpha_n+\varepsilon)}{\varphi_n(\alpha_n)} > \varepsilon\frac{\varphi_n'(\alpha_n)}{\varphi(\alpha_n)} > \varepsilon\varphi_{n-1}(\alpha_n)\varphi_{n-2}(\alpha_n).$$

Donc si $\varepsilon\varphi_{n-2}(\alpha_n) > 1$, cette expression est supérieure à $\varphi_{n-1}(\alpha_n)$; or $\alpha_n + \dfrac{1}{\varphi_{n-2}(\alpha_n)}$ est compris entre α_n et α_{n+1}, au moins à partir d'une certaine valeur de n, puisque α_n n'est pas à croissance très lente.

Nous voyons ainsi que la fonction $F(x)$ peut être, pour des valeurs croissantes de x, successivement regardée comme comparable aux fonctions successives $\varphi_n(x)$; d'ailleurs il est clair que si $F(x)$ est comparable à $\varphi_n(x)$, $e^{F(x)}$ est comparable à $\varphi_{n+1}(x)$; cette remarque va nous conduire à un résultat très curieux. Prenons en effet $\alpha_n = \log n$ et considérons la fonction $F(x+\varepsilon)$ en même temps que $F(x)$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, *mais fixe.* Il est clair que, à partir d'une certaine valeur de n, on aura

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n < \varepsilon$$

et que par suite $x + \varepsilon$ sera supérieur à α_{n+1} lorsque x sera compris entre α_n et α_{n+1}. De là et de la remarque précédente résulte immédiatement que l'on aura

$$(1) \qquad F(x + \varepsilon) > e^{F(x)}$$

et cela, quelque soit le nombre fixe ε, pourvu que x soit suffisamment grand. Nous avons vu, d'autre part, que l'on ne peut avoir, *à partir d'une valeur fixe de x*, et pour toute valeur de ε

$$F(x + \varepsilon) > \varepsilon[F(x)]^2$$

à moins que $F(x)$ ne devienne infini pour une valeur finie de x.

L'inégalité (1) exprime que, pour certaines fonctions $F(x)$, $F(x + \varepsilon)$ croît plus vite que $e^{F(x)}$; on est donc amené, ou bien à admettre que $e^{F(x)}$ est du même ordre de grandeur que $F(x)$, ou bien que $F(x + \varepsilon)$ n'est pas du même ordre de grandeur que $F(x)$; c'est cette dernière convention que nous choisirons finalement; nous allons indiquer brièvement à quel point de vue on pourrait se placer pour justifier la première.

Remarquons d'abord que, quelque rapidement que croisse la fonction $\theta(x)$, on peut trouver une fonction $F(x)$ croissant assez vite pour que, quelque petit que soit ε, l'on ait

$$F(x + \varepsilon) > \theta[F(x)],$$

pourvu que x soit suffisamment grand. Il suffirait, pour le montrer, de remplacer dans les raisonnements précédents e^x par $\theta(x)$, e^{e^x} par $\theta[\theta(x)]$. etc. Mais c'est là un point accessoire qu'il est inutile de développer en détail; nous voulions seulement montrer que, si l'on regarde $F(x + \varepsilon)$ comme du même ordre de grandeur que $F(x)$, on sera amené, *au moins pour certaines fonctions* $F(x)$ à regarder $\theta[F(x)]$ comme du même ordre de grandeur que $F(x)$, quelque rapidement que croisse la fonction donnée $\theta(x)$. Il en résulte que, si l'on se place à ce point de vue, la définition de l'ordre de grandeur ne saurait être absolue, c'est à dire indépendante de $F(x)$, car il serait évidemment absurde, $F(x)$ *étant donné*, de dire que $\theta[F(x)]$ est du même ordre de grandeur que $F(x)$, *quelque rapidement que croisse* $\theta(x)$. On devra donc adopter une définition *relative*, c'est à dire dans laquelle interviendra l'ordre de grandeur de $F(x)$. Voici, par

exemple, celle que l'on pourrait choisir. Soient $F(x)$ et $G(x)$ deux fonctions à croissance très rapide et supposons que $G(x)$ croisse plus vite [1] que $F(x)$. Si nous posons $F(x) = X$, nous aurons

$$G(x) = \theta(X)$$

et la fonction $\theta(X)$ sera une fonction positive croissante. D'ailleurs elle croîtra plus vite que X, puisque G croît plus vite que F et par suite les fonctions

$$\theta_2(X) = \theta[\theta(X)] \ , \quad . \ . \ . \ , \quad \theta_n(X) = \theta[\theta_{n+1}(X)] \ , \quad . \ . \ .$$

croîtront de plus en plus vite. On pourrait appeler θ le rapport des fonctions F et G et dire que F et G sont du même ordre de grandeur, si l'on a, quelque soit n

$$F(x) > \theta_n(x)$$

à partir d'une valeur de x suffisamment grande (qui dépend évidemment de n); avec cette définition, il est aisé de voir que $F(x + \varepsilon)$ est du même ordre de grandeur que $F(x)$, quelque soit ε. Soit en effet:

$$F(x + \varepsilon) = \theta[F(x)]$$

on en conclura

$$F(x + n\varepsilon) = \theta_n[F(x)]. \tag{1}$$

Dire que $F(x + \varepsilon)$ et $F(x)$ ne sont pas du même ordre de grandeur, c'est dire que, pour une certaine valeur de n, il existe des valeurs de X indéfiniment croissantes et pour lesquelles

$$F(X) < \theta_n(X). \tag{2}$$

Si l'on fait $F(x) = X$ dans (1) on aura

$$F(x + n\varepsilon) = \theta_n(X) > F(X)$$

[1] Nous écartons le cas où l'on trouverait des valeurs de x aussi grandes que l'on veut et telles que $G > F$ et aussi des valeurs de x aussi grandes que l'on veut et telles que $G < F$. Ce cas, dont nous dirons un mot plus loin à un autre point de vue, mériterait d'être étudié avec soin.

c'est à dire

$$x + n\varepsilon > X$$

ce qui est absurde puisque $X = F(x)$ est une fonction à croissance très rapide et que cette inégalité devrait être vérifiée pour une infinité de valeurs de X (ou de x) indéfiniment croissantes.

Pour les fonctions à croissance très lente, on pourrait donner une définition analogue; si $f(X)$ et $g(X)$ sont deux telles fonctions et si $x = f(X)$, on posera

$$g(X) = \theta(x)$$

et la fonction θ sera une fonction croissante, mais qui croîtra moins vite que x si g croît moins vite que f. Par suite les fonctions $\theta_n(x)$ croitront de moins en moins vite et f et g seront dits du même ordre de grandeur si les fonctions $\theta_n(X)$ croissent toutes plus vite que $f(X)$.

On conclura aisément de là que, si deux fonctions sont du même ordre de grandeur, il en est de même des deux fonctions inverses, mais nous n'insisterons pas sur ces considérations, car, comme on s'en convaincra aisément par la suite, ces définitions, quelque intérêt qu'elles puissent avoir, ne conviennent pas au but que nous nous proposons, parce qu'elles sont beaucoup trop larges. Nous allons exposer maintenant celles que nous adopterons dans la suite de ce mémoire.

Considérons d'abord deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ à croissance très rapide. Nous dirons qu'elles sont du même ordre de grandeur si l'on a:

$$[G(x)]^{1-\varepsilon} < F(x) < [G(x)]^{1+\varepsilon},$$

quelque soit le nombre positif ε, pourvu que x soit suffisamment grand.[1]

---

[1] On voit qu'il ne résulte pas de cette définition que $\log G(x)$ et $\log F(x)$ soient du même ordre de grandeur lorsque $F(x)$ et $G(x)$ le sont. On pourrait convenir que $F(x)$ et $G(x)$ sont du même ordre du grandeur si, au lieu des inégalités écrites dans le texte, l'on a

$$[\log G(x)]^{1-\varepsilon} < \log F(x) < [\log G(x)]^{1+\varepsilon}$$

ou même des inégalités analogues avec des signes *log* superposés un nombre quelconque fini de fois. Ces définitions permettraient de simplifier certains des raisonnements qui suivent et conduiraient aux mêmes résultats généraux; mais, pour plus de netteté, nous nous en tiendrons à la définition donnée dans le texte.

Cette définition est très précise et semble ne pouvoir donner lieu à aucune difficulté; mais elle conduit, lorsqu'on considère les fonctions inverses, à des conséquences très curieuses et en même temps tout à fait essentielles pour ce qui va suivre.

Nous dirons que deux fonctions à croissance très lente $x = f(X)$ et $x_1 = g(X_1)$ sont du même ordre de grandeur, lorsque les fonctions inverses (à croissance très rapide) $X = F(x)$ et $X_1 = G(x_1)$ sont du même ordre de grandeur (pour $x = x_1$). Cette définition étant posée, la conséquence curieuse dont nous voulons parler est la suivante: les fonctions à croissance très lente

(1) $$x = F(X),$$

(2) $$x_1 = G(X) = F(X) + \varepsilon,$$

ε étant une constante, ne sont pas nécessairement du même ordre de grandeur. Supposons en effet que de la relation (1) on tire:

$$X = f(x),$$

la relation (2) donnera

$$X = f(x_1 - \varepsilon) = g(x_1).$$

On a donc $g(x) = f(x - \varepsilon)$ et nous savons que la fonction $g(x)$ et la fonction $f(x)$ ne sont pas nécessairement du même ordre de grandeur, d'après la définition que nous avons adoptée, puisque l'on peut avoir

$$f(x) > e^{g(x)}$$

quelque petit que soit ε, pourvu que x soit assez grand, si la fonction g est convenablement choisie. Donc les fonctions inverses $F(X)$ et $F(X) + \varepsilon$ ne devront pas être considérées non plus comme étant du même ordre de grandeur.

Cet exemple prouve avec quelles précautions on doit raisonner sur les ordres de grandeur des fonctions à croissance très rapide ou très lente. Si l'on appelle *définir l'ordre de grandeur d'une fonction*, donner une fonction du même ordre de grandeur, on voit que, pour définir l'ordre de grandeur d'une fonction à croissance très rapide par la connaissance de la fonction inverse, il est nécessaire de donner celle-ci avec une précision extrême. Par exemple, dans le mémoire que nous avons déjà cité, M. Ha-

DAMARD, considérant une fonction entière $\Sigma a_m \xi^m$, appelle $\varphi(m)$ une fonction positive croissant plus vite que $\sqrt[m]{\frac{1}{a_m}}$ et $\psi(R)$ une fonction telle que le module de la fonction considérée (pour $|z| = R$) croisse moins vite que $e^{\int \frac{\psi(R)}{R}}$. Il montre (au n° 6) que si l'on donne la fonction φ on peut prendre pour ψ la fonction inverse de φ. Supposant ensuite que la fonction ψ soit donnée il montre, dans le cas où elle est à croissance très rapide, que, en désignant par φ la fonction inverse de ψ, l'on a

$$\sqrt[m]{\frac{1}{a_m}} > (1 - \varepsilon)\varphi(m), \tag{1}$$

ε pouvant être aussi petit que l'on veut, pourvu que m soit assez grand. M. HADAMARD ajoute (p. 185) »Ceci peut être considéré comme la réciproque du théorème démontré au n° 6. On peut donc dire que, dans ce cas, ce théorème donne *la véritable relation cherchée*». Il est clair que cela est parfaitement exact, à un certain point de vue; mais pour nous, ce résultat ne serait pas suffisamment précis et nous serons obligés de le compléter. En effet, si l'on considère ε comme une constante, les fonctions $\varphi(m)$ et $(1 - \varepsilon)\varphi(m)$ peuvent admettre des fonctions inverses $\psi(R)$ d'ordres de grandeur très différents et l'ordre de grandeur de $\psi(R)$ ne serait pas suffisamment défini. Il aurait d'ailleurs été assez singulier que les méthodes ingénieuses de M. HADAMARD, qui ne fournissent que des *inégalités* dans le cas où $\psi(R)$ n'est pas à croissance très rapide, donnent une relation précise dans le cas plus difficile où $\psi(R)$ croît très rapidement. Nous allons voir que l'on peut, dans ce cas, définir l'ordre de grandeur de $\psi(R)$, au sens que nous avons donné à cette expression, c'est à dire donner des inégalités plus précises que celles qui résulteraient de la relation (1) dans laquelle ε serait regardé comme une constante arbitrairement petite.

Nous allons pour cela, sans aborder dans toute sa généralité la question de reconnaître directement dans quels cas deux fonctions à croissance très lente sont du même ordre de grandeur, indiquer un cas très important où il en est ainsi. Nous montrerons que, si l'on pose:

$$f(X) = g(X) + \frac{1}{[\log X]^{\alpha}}$$

α étant un nombre *positif* quelconque (qui peut être inférieur à *un*) les deux fonctions $g(X)$ et $f(X)$ sont du même ordre de grandeur. Par définition, cela revient à dire que les fonctions inverses sont du même ordre de grandeur, c'est à dire que la fonction à croissance très rapide

$$X = G(x)$$

est du même ordre de grandeur que la fonction

$$X_1 = F(x) = G\left[x + \frac{1}{[\log X]^\alpha}\right].$$

Remarquons d'abord que la fonction $F(x)$ est constamment supérieure à la fonction $G(x)$; il nous suffit donc de démontrer l'inégalité

$$F(x) < [G(x)]^{1+\varepsilon},$$

ε étant un nombre positif arbitraire. Si cette inégalité n'était pas vérifiée, quelque petit que soit ε, à partir d'une certaine valeur de x, il existerait un nombre positif ε tel que l'on ait

(1) $$F(x) > [G(x)]^{1+\varepsilon},$$

pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment. D'ailleurs il est manifeste que cette infinité de valeurs ne peut être dénombrable; car, si x_1 est l'une d'elles, en diminuant, s'il est nécessaire, ε, les fonctions F et G étant supposées continues, l'inégalité serait vérifiée dans un petit intervalle comprenant x_1. Nous nous contenterons de démontrer que l'inégalité (1) ne peut être vérifiée pour les valeurs de x remplissant des intervalles dont la somme soit infinie; ce n'est pas tout à fait la proposition énoncée, mais cela nous suffira pleinement pour les applications que nous avons en vue.

L'inégalité (1) peut en effet s'écrire, en posant $X = G(x)$

(2) $$G\left(x + \frac{1}{(\log X)^\alpha}\right) > [G(x)]^{1+\varepsilon}.$$

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que cette inégalité soit vérifiée pour toute valeur de x; posons $x_1 = x + \frac{1}{(\log X)^\alpha}$ et $X_1 = G(x_1)$; nous aurons

$$X_1 > X^{1+\varepsilon}.$$

Remplaçons ensuite dans (2), x par x_1; nous obtiendrons

$$(3)\qquad G\left[x_1 + \frac{1}{(\log X_1)^\alpha}\right] > [G(x_1)]^{1+\varepsilon}$$

ou, en posant

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{(\log X_1)^\alpha}; \qquad X_2 = G(x_2);$$

$$X_2 > X_1^{1+\varepsilon}.$$

En continuant de même, nous aurons généralement

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{(\log X_{n-1})^\alpha}; \qquad X_n = G(x_n);$$

$$X_n > X_{n-1}^{1+\varepsilon}$$

et par suite

$$\log X_n > (1 + \varepsilon) \log X_{n-1};$$

$$\frac{1}{(\log X_n)^\alpha} < \frac{1}{(\log X_{n-1})^\alpha} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon)^\alpha}$$

et par suite

$$(4)\qquad x_{n+1} = x_1 + \frac{1}{(\log X_1)^\alpha} + \frac{1}{(\log X_2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(\log X_n)^\alpha}$$

$$< x_1 + \frac{1}{(\log X_1)^\alpha}\left[1 + \frac{1}{(1 + \varepsilon)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{(n-1)\alpha}}\right].$$

On en conclut que l'on a $x_{n+1} < \xi$, ξ étant un nombre fixe aisé à calculer et par suite:

$$G(\xi) > G(x_{n+1}) > X_1^{(1+\varepsilon)^n},$$

ce qui est évidemment absurde puisque ξ est fixe et que n peut être pris aussi grand que l'on veut.

Il reste à examiner le cas où l'inégalité (2) ne serait pas vérifiée pour toute valeur de x; on remplacera alors au besoin $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ respectivement par des nombres plus grands $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, tels que cette inégalité soit vérifiée. La fonction G étant croissante, toutes nos inégalités seront vérifiées à fortiori. Mais, pour que nous puissions affirmer que x_{n+1} est inférieur à un nombre fixe ξ, il est nécessaire de supposer que l'étendue totale des intervalles, dans lesquels l'inégalité (2) est vérifiée,

est inférieure à la somme de la série convergente qui figure dans le second membre de l'inégalité (4); c'est ce qui aura lieu dans tous les cas si nous supposons cette étendue totale infinie. Nous pouvons donc affirmer que, si la différence de deux fonctions à croissance très lente est inférieure à $\frac{1}{(\log X)^{\alpha}}$, les fonctions inverses sont du même ordre de grandeur, *en écartant tout au plus des intervalles d'étendue totale finie.* Nous verrons que cette dernière restriction, qu'il serait sans doute possible de lever, n'est jamais gênante.

Il est aisé maintenant de compléter la proposition de M. HADAMARD; il considère (p. 184—185) une fonction $X = \psi(x)$ qui croît comme $x^{\frac{1}{a}}$; M. HADAMARD suppose que $\psi(x)$ croît plus vite que $x^{\frac{1}{a}}$; nous supposons qu'elle croisse précisément comme $x^{\frac{1}{a}}$, c'est à dire que α soit la fonction [1] de x définie par l'égalité

$$X = \psi(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Cela étant M. HADAMARD obtient l'inégalité

$$\sqrt{\frac{1}{a_m}} > e^{-a}\varphi(m) = (1 - \varepsilon)\varphi(m),$$

φ étant la fonction inverse de ψ. Il s'agit d'évaluer ε en fonction de $m = X$; or on a

$$1 - \varepsilon = e^{-\alpha}$$

et α est très petit; on a donc $\varepsilon < 2\alpha$; or

$$\alpha = \frac{\log x}{\log X}$$

et X étant une fonction à croissance très rapide cette expression est inférieure à $\frac{1}{2x\sqrt{\log X}}$; donc $\varepsilon\varphi(m) = \varepsilon x < \frac{1}{\sqrt{\log X}}$; cela suffit pour que les fonctions $\varphi(m)$ et $(1 - \varepsilon)\varphi(m)$ soient considérées par nous comme du même ordre de grandeur.

[1] Le fait que a est une fonction de x au lieu d'être une constante n'introduit pas de difficulté sérieuse.

On compléterait aisément de la même manière le théorème fondamental qu'énonce M. Hadamard p. 201:

»*Si le coefficient* a_m *décroit plus vite que* $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$, *la* $p^{\text{ième}}$ *racine a un module supérieur à* $(1 - \varepsilon)\varphi(p)$, où ε est infiniment petit pour p infini.»

Nous ajouterons que ε *est inférieur à* $\frac{1}{\sqrt{\log p}}$ et cette remarque donne un sens *beaucoup plus précis* à cette proposition; l'on se rendra compte sans peine que cette précision est indispensable pour ce qui va suivre.

Il n'y a plus, en effet, maintenant, aucune difficulté à étendre aux produits de facteurs primaires d'ordre infini la proposition fondamentale que nous avons démontrée pour les fonctions d'ordre fini et pour les exponentielles $e^{q(z)}$. Nous allons montrer que l'on peut trouver des cercles de rayons croissant indéfiniment et sur lesquels le logarithme des plus grandes valeurs du module de la fonction d'une part, et le logarithme de l'inverse des plus petites valeurs de ce module, d'autre part, sont du même ordre de grandeur. Nous verrons même que l'on peut donner aux rayons de ces cercles toutes les valeurs comprises dans une série d'intervalles tels, que l'étendue totale de ceux de ces intervalles qui correspondent à des rayons inférieurs à R soit une fraction de R aussi voisine que l'on veut de l'unité (mais fixe, bien entendu). Cette remarque nous sera très utile.

Considérons donc un produit de facteurs primaires

$$F(z) = \prod F_\rho\left(\frac{1}{a_n}\right);$$

les a_n sont supposés rangés par ordre de modules croissants et ρ est supposé égal à $(\log n)^2$. ρ est une fonction croissante de n; nous pouvons le regarder aussi comme une fonction croissante de $|a_n| = r$; nous supposerons que ρ est une fonction de r à croissance très rapide; le cas où il n'en serait pas ainsi se traiterait aisément d'une manière directe.[1] La

[1] Ce cas se subdivise en deux principaux, celui où la fonction $\rho(r)$ croît moins vite que $e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^r}}}}$ le nombre des exposants étant limité et celui où la fonction $\rho(r)$ *n'est pas comparable* à ces fonctions c'est à dire est alternativement plus grande et plus petite pour

fonction inverse $r = F(\rho)$ sera une fonction à croissance très lente; nous avons d'ailleurs $\rho = [\log n]^2$ de sorte que r est aussi une fonction de n à croissance très lente. Le théorème de M. HADAMARD cité en dernier lieu exprime que l'ordre de grandeur de r, considéré comme fonction de n, n'est pas inférieur à l'ordre de grandeur de $\varphi(n) = \sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}}$, a_n étant le coefficient de z^n dans le développement de TAYLOR de la fonction. Nous verrons que, pour le produit de facteurs primaires considéré, r est précisément de l'ordre de grandeur de $\varphi(n)$.

Nous allons chercher à évaluer la rapidité de la convergence du produit infini considéré, pour une valeur de z dont le module est r, c'est à dire rechercher combien il faut prendre de facteurs pour que le produit des facteurs restants ait un module compris entre $\frac{1}{2}$ et 2, par exemple. Il suffit manifestement pour cela d'étudier la convergence de la série

$$\sum \left(\frac{r}{|\alpha_n|}\right)^{\rho(|\alpha_n|)}$$

et de chercher quelle valeur il faut donner à n pour que *le reste* de la série, à partir du $n^{\text{ième}}$ terme, soit inférieur à $\log 2$. Supposons que r soit compris entre $|\alpha_p|$ et $|\alpha_{p+1}|$ et soit $|\alpha_n| = r + \varepsilon$. Le terme de rang n de la série a pour module

$$\left(\frac{r}{r+\varepsilon}\right)^{\rho(r+\varepsilon)} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{r+\varepsilon}\right)^{\rho(r+\varepsilon)}.$$

Cette expression est sensiblement égale à $e^{\frac{\varepsilon\rho(r+\varepsilon)}{r+\varepsilon}}$. D'autre part, le rapport du terme de rang $n+1$ au terme de rang n est

$$\left(\frac{r}{|\alpha_{n+1}|}\right)^{\rho_{n+1}-\rho_n}\left(\frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|}\right)^{\rho_n}$$

des valeurs indéfiniment grandes de r. Le premier cas peut se traiter directement et le second se ramène, soit au premier, soit à celui qui est traité dans le texte, en raisonnant comme à la page 386.

en faisant pour abréger $\rho(|\alpha_p|) = \rho_p$. Ce rapport est très voisin de *un;* il est inférieur à

$$\left(\frac{r}{|\alpha_n|}\right)^{\rho_{n+1}-\rho_n} = \left(\frac{r}{r+\varepsilon}\right)^{\rho_{n+1}-\rho_n}$$

or

$$\rho_n = (\log n)^2, \qquad \rho_{n+1} = (\log(n+1))^2.$$

Donc

$$\rho_{n+1} - \rho_n = \left[[\log(n+1)]^2 - [\log n]^2\right] > \frac{1}{n}.$$

Le rapport considéré est donc inférieur à

$$\left(\frac{r}{r+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{r+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}} < 1 - \frac{\varepsilon}{n(r+\varepsilon)}.$$

On en conclut que le reste de la série considérée, bornée au $n^{\text{ième}}$ terme, est comparable à

$$\frac{n(r+\varepsilon)}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon\rho(r+\varepsilon)}{r+\varepsilon}}.$$

En remarquant que $\rho(r+\varepsilon) = [\log n]^2$, cette expression a pour logarithme

$$\log(r+\varepsilon) + \log(n) + \log\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r+\varepsilon}[\log n]^2.$$

Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{[\log n]^\alpha}$, α étant plus petit que un, pour que cette expression soit négative et très grande en valeur absolue et par suite le reste de la série négligeable. Cette valeur de ε est très importante parce qu'elle nous montre que si $|z| = r$, la fonction est assimilable à une fonction d'ordre au plus égal à $\rho(r+\varepsilon)$, ε étant comparable à une puissance positive de $\frac{1}{\rho}$, c'est à dire que *l'ordre de la fonction est de l'ordre de grandeur de* $\rho(r)$. De même n, considéré comme fonction de r, est du même ordre de grandeur que $n(r+\varepsilon)$.

Cela étant, on voit immédiatement que, pour des valeurs de z de module r, les plus grandes et les plus petites valeurs[1] du module de

[1] Pour les plus petites valeurs, on doit considérer seulement ce qui se passe sur

la fonction se comportent comme si la fonction était d'ordre $\rho(r)$ et par suite que les plus grandes valeurs et l'inverse des plus petites sont du même ordre de grandeur. Il est nécessaire de préciser un peu cette proposition; en prenant $\rho = (\log n)^2$, nous prenons une valeur plus élevée qu'il n'est nécessaire pour que le produit infini soit convergent; il suffirait de prendre $\rho^{\frac{1}{2}}$, mais non $\rho^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, ε étant positif. On en conclut aisément que nous pouvons affirmer que, si les plus grandes valeurs $M(r)$ ont pour expression e^{r^ρ}, les plus petites $\frac{1}{N(r)}$ ont pour expression $e^{-r^{\rho'}}$, ρ' étant compris entre ρ et $\rho^{\frac{1}{2}}$. D'ailleurs le nombre 2 aurait pu être remplacé par un autre nombre quelconque supérieur à *un*. *En d'autres termes* $\log M(r)$ *et* $\log N(r)$ *sont du même ordre de grandeur.* Tel est le résultat précis auquel nous arrivons; il est aisé d'en tirer des conséquences importantes.

Considérons en effet une fonction entière quelconque $G(z)$; connaissant son ordre de grandeur, nous pouvons, par le théorème de M. Hadamard précisé comme nous l'avons fait, calculer un ordre de grandeur maximum pour la fonction $\rho(r)$. Si d'ailleurs nous connaissons les zéros de $G(z)$ nous pourrons former un produit de facteurs primaires $\Pi(z)$ auquel correspondra une fonction $\rho_1(r)$ au plus égale à $\rho(r)$. Nous aurons d'ailleurs

$$G(z) = \Pi(z)e^{H(z)}.$$

Il résulte de ce qui précède que l'ordre de grandeur de $\Pi(z)$ et aussi, sur une infinité de cercles, l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\Pi(z)}$, ne dépasse pas celui de $G(z)$. *Il en résulte que l'ordre de grandeur de* $e^{H(z)}$ *ne dépasse pas celui de* $G(z)$. C'est là une propriété très importante de la décomposition en facteurs primaires, quand on n'introduit pas dans ceux-ci des facteurs exponentiels superflus.

On est naturellement conduit à regarder une fonction entière comme d'autant plus compliquée qu'elle croît plus vite. On voit que les deux

---

certains cercles; voir plus haut p. 361 et le mémoire de M. Hadamard p. 204. On verrait aisément que l'on peut exclure pour les rayons de ces cercles compris dans un intervalle donné une fraction aussi petite que l'on veut de cet intervalle.

facteurs fondamentaux $H(z)$ et $e^{H(z)}$, en lesquels se décompose $G(z)$ ne croissent pas plus vite que $G(z)$.[1] On en conclut relativement à l'inverse des plus petites valeurs de $G(z)$ les mêmes propriétés que pour $H(z)$ et $e^{H(z)}$. En procédant sans règle fixe, au contraire, on pourrait être conduit à décomposer une fonction en un produit de fonctions *plus compliquées;* c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si, pour les fonctions de genre fini, on procédait comme si le genre dépassait de plusieurs unités sa valeur réelle.

DEUXIÈME PARTIE.

Le théorème de M. Picard.

Nous allons établir tout d'abord une relation importante entre l'ordre de grandeur d'une fonction entière et l'ordre de grandeur de sa dérivée. Considérons une fonction entière

$$G(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots;$$

nous désignerons par $\mu(r)$ le maximum du module de $G(z)$ lorsque $|z| = r$, et par $\mu_1(r)$ la quantité analogue pour la dérivée $G'(z)$

$$G'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + na_n z^{n-1} + \ldots$$

nous nous proposons de trouver une relation entre l'ordre de grandeur de $\mu(r)$ et de $\mu_1(r)$; mais $\mu_1(r)$ n'est pas, en général, la dérivée de $\mu(r)$; voici comment nous procéderons, posons

$$M(r) = |a_0| + |a_1| r + \ldots + |a_n| r^n + \ldots$$

nous aurons évidemment

$$M'(r) = |a_1| + 2|a_2| r + \ldots + n|a_n| r^{n-1} + \ldots.$$

[1] Pour être tout à fait exact, nous devons dire que ce sont les logarithmes de ces facteurs qui sont au plus du même ordre de grandeur $\log |G(z)|$.

Pour comparer μ et μ_1, nous comparerons μ à M, M à M', et M' à μ_1. D'ailleurs on voit que la relation entre μ_1 et M' est la même que la relation entre μ et M; nous avons donc à comparer successivement $\mu(r)$ et $M(r)$, puis $M(r)$ et $M'(r)$.

Occupons nous d'abord de $\mu(r)$ et de $M(r)$; on a d'abord visiblement

$$(1) \qquad M(r) \geqq \mu(r).$$

D'autre part, on a évidemment (cf. p. 365—366)

$$r^m |a_m| < \mu(r)$$

et par suite, ρ étant inférieur à r

$$M(\rho) < \frac{r\mu(r)}{r-\rho}.$$

On déduit de là comme on l'a vu plus haut que, α étant un nombre positif quelconque, l'on a

$$(2) \qquad M(r) < [\mu(r)]^{1+\alpha}$$

sauf tout au plus dans une série d'intervalles dont l'étendue totale, dans un intervalle assez grand donné, est une fraction aussi petite que l'on veut de cet intervalle donné.

Les inégalités (1) et (2) expriment les relations que nous voulions établir entre $M(r)$ et $\mu(r)$; on en établirait de semblables entre $M'(r)$ et $\mu_1(r)$.

Considérons maintenant les fonctions $M(r)$ et $M'(r)$, c'est à dire une fonction positive croissante et sa dérivée. Supposons que dans un intervalle, r_0, r_1 on ait

$$M'(r) > [M(r)]^{1+\alpha}.$$

On en conclurait, en désignant par M_0 et M_1 les valeurs de $M(r)$ pour $r = r_0$ et $r = r_1$:

$$r_1 - r_0 = \int_{M_0}^{M_1} \frac{dM(r)}{M'(r)} < \int_{M_0}^{M_1} \frac{dM}{M^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha M_0^\alpha}.$$

Donc l'intervalle $r_1 - r_0$ ne peut dépasser $\frac{1}{\alpha M_0^\alpha}$. Lorsque le nombre α est

donné, quelque petit qu'il soit, on peut déterminer r_0 de manière que cette expression soit aussi petite que l'on veut et on peut affirmer que pour toutes les valeurs de r supérieures à r_0, sauf peut être dans une série d'intervalles d'étendue totale finie,[1] on a

$$M'(r) < [M(r)]^{1+\alpha}. \tag{3}$$

La comparaison des inégalités (1), (2), (3) prouve que l'on a

$$[\mu(r)]^{1+\alpha} > \mu_1(r) > [\mu(r)]^{1-\alpha},$$

quelque soit le nombre positif α, sauf au plus dans une série d'intervalles satisfaisant à la condition souvent répétée.[2]

Nous pouvons tirer de là la conclusion suivante: considérons un nombre fini de fonctions entières $G_1, G_2, \ldots, G_n$ et une expression de la forme

$$\frac{\Sigma A G_i^{a_i} G_k'^{\beta_k} \ldots}{\Sigma M G_i^{m_i} G_k'^{n_k} \ldots}$$

c'est à dire une fraction rationnelle par rapport à ces fonctions et leurs dérivées d'ordre fini quelconque. Supposons d'ailleurs que les modules des fonctions données, par $|z| = r$, soient tous inférieurs à $e^{\mu(r)}$, $\mu(r)$ étant une fonction positive croissante. Nous savons que, dans ces conditions, sur une infinité de cercles, les inverses des minimums sont inférieurs à $e^{\mu^{1+\alpha}}$. Dès lors nous pourrons affirmer que sur une infinité de cercles (dont les rayons remplissent toujours des intervalles satisfaisant à la même condition), la fraction rationnelle considérée est comprise entre

$$e^{\mu^{1+\alpha}} \text{ et } e^{-\mu^{1+\alpha}}.$$

Nous possédons maintenant les éléments nécessaires, pour démontrer la proposition fondamentale qui est la généralisation du théorème de M. Picard. Nous allons d'abord en étudier un cas particulier, d'ailleurs très étendu, dans lequel la démonstration est plus simple. Considérons deux séries de n fonctions entières $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_n(z)$; $H_1(z), H_2(z)$,

---

[1] La continuité des fonctions M et M' permet d'exclure le cas où l'inégalité (3) serait vérifiée pour des valeurs de r formant une suite discontinue, mais présentant des points dans tout intervalle.

[2] Nous avons jugé inutile d'écrire l'inégalité évidente $rM'(r) > M(r) - a_0$.

$\ldots, H_n(z)$. Nous supposons que ces fonctions entières (au plutôt le maximum de leur module pour $|z| = r$), croissent *toutes* moins vite que $e^{\mu(r)}$; nous supposons, de plus, que les fonctions entières de la seconde série $H_1, H_2, \ldots, H_n$, sont telles que les différences $H_i - H_k$ croissent *toutes* plus vite que $[\mu(r)]^2$. Cela posé, l'identité

$$(1) \qquad G_1(z)e^{H_1(z)} + G_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + G_n(z)e^{H_n(z)} = 0$$

entraîne nécessairement:

$$G_1(z) = G_2(z) = \ldots = G_n(z) = 0.$$

Ce théorème est évident pour $n = 1$; pour le démontrer en général, il nous suffit donc de montrer que l'identité (1) entraîne une identité analogue ayant un terme de moins et dont les coefficients ne peuvent être nuls que si ceux de l'identité (1) le sont. Pour le voir, il suffit de prendre la dérivée du premier membre de l'identité (1) après l'avoir divisée par son dernier terme; on obtient ainsi:

$$(2) \qquad (G_1'G_n - G_1G_n' + G_1G_nH_1' - G_1G_nH_n')e^{H_1-H_n} + \ldots = 0.$$

Il est clair que les coefficients et les exposants de cette identité satisfont aux mêmes conditions d'inégalité que ceux de l'identité (1); il reste à montrer que, si les coefficients de l'identité (2) sont nuls, il en est de même de ceux de l'identité (1). Or, dire que le premier coefficient dans (2) est nul revient à dire que *l'expression:*

$$\frac{G_1}{G_n} e^{H_1-H_n}$$

est une constante. Or cela est impossible; car, si ni G_1 ni G_n ne sont nuls, nous pouvons trouver une infinité de cercles sur lesquels $\frac{G_1}{G_n}$ est supérieur $e^{-2\mu(r)}$; de même sur une infinité de cercles, $e^{H_1-H_2}$ est supérieur [1] à $e^{[\mu(r)]^2}$; leur produit peut donc, sur des cercles dont les rayons remplissent une

[1] Voir plus haut, en ce qui concerne la relation entre les plus grandes valeurs du module de $H_1 - H_2$ et les plus grandes valeurs positives de sa partie réelle. Pour être tout à fait rigoureux il faudrait remplacer $[\mu(r)]^2$ par $[\mu(r)]^{2-\varepsilon}$; mais cela n'a aucune importance.

infinité d'intervalles satisfaisant à une condition souvent indiquée, être aussi grand que l'on veut et ne peut se réduire à une constante. Notre proposition est donc établie; car, si l'un des coefficients G_1 ou G_n était nul, on serait de suite ramené au cas où il y a un terme de moins dans l'identité.

Nous allons aborder maintenant le cas général de notre théorème; dans l'identité (1) nous supposons les fonctions G inférieures à $e^{\mu(r)}$ et les fonctions $H_i - H_k$ supérieures à $[\mu(r)]^2$; mais nous ne supposons plus les H inférieurs à $e^{\mu(r)}$; ils peuvent être aussi grands que l'on veut. Dans ces conditions nous allons encore démontrer que tous les G sont nuls.

Il est clair tout d'abord que s'il existait une fonction $\nu(r)$ supérieure à μ et telles que les $H_i - H_k$ soient compris entre $[\nu(r)]^2$ et $e^{\nu(r)}$, la démonstration subsisterait en remplaçant μ par ν. La démonstration subsisterait encore si les $H_i - H_k$ étaient compris entre $[\nu(r)]^2$ et $e^{\nu(r)}$ pour une infinité de valeurs de r, remplissant des intervalles d'étendue totale assez grande; tels par exemple que ceux d'entre eux qui sont compris dans un intervalle donné dépassent par leur étendue une fraction déterminée de cet intervalle. Il n'y a donc de difficulté que si, pour toute valeur de r, on tout au moins pour des valeurs remplissant des intervalles d'étendue considérable, les différences $H_i - H_k$ sont très différentes, c'est à dire si l'une d'elles, par exemple, est supérieure au carré de chacune des autres (on pourrait même dire à une puissance quelconque; mais ceci nous suffit). D'ailleurs il peut se faire que ce ne soit pas toujours la même des différences $H_i - H_k$ qui soit supérieure au carré des autres; mais, leur nombre étant limité, si on le désigne par m, on pourra affirmer qu'au moins une des différences, dans des intervalles qui dépassent la fraction $\frac{1}{m}$ de l'intervalle total qui les comprend, est supérieure au carré des autres (voir la note au bas de la page 384). Le cas où plusieurs des différences $H_i - H_n$ (n fixe) auraient cette propriété ne présente pas de difficulté spéciale; supposons pour fixer les idées qu'il n'y en ait qu'une: $H_1 - H_n$. Il est clair que les différences $H_1 - H_2$, $H_1 - H_3, \ldots, H_1 - H_{n-1}$ auront la même propriété par rapport aux autres $H_i - H_k$. On voit dès lors aisément que l'on peut recommencer la démonstration, en ayant soin de garder pour la fin le terme $G_1 e^{H_1}$

ou plutôt ceux qui s'en déduisent par les opérations successives; on démontrera ainsi que G_1 est nul, etc.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante: *l'identité*

$$\Sigma G_i(z)e^{H_i z}$$

dans laquelle les G_i *sont inférieurs à* $e^{\mu(r)}$ *et les* $H_i - H_k$ *supérieurs à* $[\mu(r)]^2$ *entraîne nécessairement la nullité de tous les* G. On pourrait d'ailleurs remplacer $[\mu(r)]^2$ par $[\mu(r)]^{1+\alpha}$.

Dans cet énoncé et la démonstration qui précède, nous avons constamment, pour abréger, omis les mots *module maximum pour* $|z| = r$.

Un cas particulier de cette proposition est connu depuis longtemps: c'est celui où les G et les $H_i - H_k$ sont des polynômes. Voici quelques autres cas particuliers, qui pourraient d'ailleurs être démontrés par une voie élémentaire, sans qu'on ait à faire usage de notre théorie générale des fonctions croissantes:

Les G sont des polynomes et les $H_i - H_k$ des fonctions entières de genre fini;

Les G sont des fonctions entières dont le genre[1] ne dépasse pas μ et les $H_i - H_k$ des polynomes dont le degré dépasse μ.

Les G et les $H_i - H_k$ sont des fonctions entières de genre fini quelconque.

Voici au contraire un cas particulier important dont la démonstration paraît aussi difficile que celle de la proposition générale:

Les G sont des fonctions entières de genre fini (ou des polynomes) et les $H_i - H_k$ des fonctions entières *quelconques.*

Nous avons dit que cette proposition peut être regardée comme la généralisation du théorème de M. Picard; à proprement parler, c'est plutôt le corollaire que nous allons en déduire immédiatement qui constitue cette généralisation. Désignons par $G(z)$ une fonction entière et considérons toutes les équations de la forme

$$(1) \qquad \varphi(z)G(z) = \psi(z)$$

dans lesquelles les fonctions φ et ψ sont telles que le logarithme des

[1] Au lieu du genre μ nous pourrions introduire l'ordre ρ; la proposition serait plus précise lorsque ρ n'est pas entier.

plus grandes valeurs de leur module croît moins vite qu'une puissance déterminée, d'exposant inférieur à *un*, du logarithme des plus grandes valeurs du module de G. Cela étant, je dis que toutes ces équations, *sauf une au plus*, ont autant de racines qu'il résulte de la réciproque du théorème de M. Hadamard, telle que nous l'avons précisée.[1] En d'autres termes, en posant

$$(2) \qquad \varphi(z)G(z) - \psi(z) = \Pi(z)e^{H_1(z)}$$

$\Pi(z)$ étant un produit canonique de facteurs primaires, la fonction $\Pi(z)$ ne peut être telle que le logarithme des plus grandes valeurs de son module croisse moins vite qu'une puissance, d'exposant inférieur à un, du logarithme des plus grandes valeurs de G. Il ne peut y avoir à ce fait qu'*une* exception. En effet si, en même temps que l'identité (2), nous avions l'identité

$$(3) \qquad \varphi_1(z)G(z) - \psi_1(z) = \Pi_1(z)e^{H_1(z)},$$

Π et Π_1 satisfaisant ainsi que φ, φ_1, ψ, ψ_1, à la condition indiquée, on obtiendrait en éliminant $G(z)$ entre (2) et (3), une relation de la forme

$$K_1(z)e^{H(z)} + K_2(z)e^{H_1(z)} + K_3(z) = 0.$$

D'ailleurs les K et les H satisferaient aux inégalités exigées par l'énoncé de notre théorème général[2] (et même par l'énoncé du cas particulier que nous avons examiné en premier lieu) de sorte qu'on aurait

$$K_1 = K_2 = K_3 = 0,$$

ce qui est absurde si les relations (2) et (3) ne sont pas identiques.

---

[1] M. Picard, en supposant que φ soit une constante et ψ un polynome avait montré que toutes les équations (1), sauf une au plus, ont une infinité de racines. (Annales de l'Ecole Normale 1880). M. Picard avait d'ailleurs étendu ce théorème au cas d'un point singulier essentiel isolé, que nous avons laissé complètement de côté ici. Voir une note intéressante de M. Hadamard, Comptes Rendus, mai 1896.

[2] Il ne pourrait y avoir de difficulté que pour la différence $H - H_1$; il suffit d'écrire $K_1e^{H-H_1} + K_2 = K_3e^{-H_1}$, pour reconnaître que si $H - H_1$ ne dépassait pas l'ordre de grandeur requis, l'ordre de grandeur du premier membre serait inférieur à celui du second.

C'est là, semble-t-il, la généralisation proprement dite la plus étendue que l'on puisse exiger pour le théorème de M. PICARD; on déduirait aisément de notre proposition fondamentale une foule d'autres généralisations, dans l'énoncé desquelles figureraient plusieurs fonctions entières différentes, ou bien des équations non linéaires, etc. En ce sens, c'est cette proposition fondamentale qui est la généralisation la plus complète de ce théorème.

J'ai dû abréger bien des démonstrations et même laisser de côté des détails importants, sous peine d'allonger démesurément ce mémoire; j'ai tenu surtout à indiquer aussi nettement que possible la suite des idées et c'est ce qui m'a amené à conserver à peu près complètement pour l'exposition l'ordre même que j'ai suivi dans mes recherches. J'ai cependant rejeté à la fin et je vais exposer maintenant le cas particulier que j'ai traité le premier d'une manière rigoureuse, parce que ce me sera une occasion de montrer comment l'ordre analytique que suit l'intuition peut être transformé en une exposition synthétique.

Je me proposais de démontrer l'impossibilité d'une relation de la forme

$$e^{G(z)} + e^{G_1(z)} = 1 \qquad (1)$$

et voici le raisonnement que j'ai fait tout d'abord: la relation (1) montre que G et G_1 sont du même ordre de grandeur; soit $\mu(r)$ cet ordre; on a $e^{G_1} - 1 = -e^{-G}$ et par suite $e^{G_1} - 1$ peut devenir infiniment petit de d'ordre de $e^{-\mu(r)}$. Cela revient à dire que $G_1 - 2ni\pi$ est très petit de l'ordre de $e^{-\mu(r)}$; or l'identité (1) montre que l'on a

$$G_1 - 2ni\pi = e^{F_n(z)}; \qquad (2)$$

si le second membre devient très petit de l'ordre de $e^{-\mu(r)}$, on en conclut qu'il peut devenir très grand de l'ordre de $e^{\mu(r)}$; d'ailleurs $G_1 - 2ni\pi$ étant très petit, n est au plus de l'ordre de grandeur de $\mu(r)$; donc, dans l'identité (2), le premier membre serait de l'ordre de grandeur de $\mu(r)$, ce qui est absurde puis que le second membre atteint $e^{\mu(r)}$.

Avec les notions précises que nous avons acquises sur les ordres de grandeur, ce raisonnement est parfaitement rigoureux; mais, n'ayant pas alors ces notions précises, j'ai dû, pour le rendre rigoureux, lui donner une forme synthétique que je vais maintenant exposer.

Récrivons les identités

$$e^{G(z)} + e^{G_1(z)} = 1, \tag{1}$$

$$G_1(z) - 2ni\pi = e^{\Gamma_n(z)}. \tag{2}$$

Dans cette dernière, n est un entier positif, nul ou négatif.

Désignons par $M(r)$ le maximum le module de $G(z)$ pour $|z| = r$, par $A(r)$ le maximum des valeurs positives de la partie réelle de G et par $+B(r)$ le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $-G$, dans les mêmes conditions. Désignons par M_1, A_1, B_1, μ_n, α_n, β_n les mêmes fonctions, définies à l'aide de G_1 et de Γ_n. Nous avons d'abord les inégalités évidentes

$$A(r) < M(r), \qquad B(r) < M(r) \tag{3}$$

et les inégalités analogues. D'autre part, l'identité (1) montre que, pour les valeurs de r telles que $A(r)$ dépasse 2, l'on a

$$\frac{1}{2}A(r) < A_1(r) < 2A(r). \tag{4}$$

Enfin nous avons vu que, pour les valeurs de r dépassant un nombre fixe, l'on a, si ρ est un nombre quelconque inférieur à r

$$M(\rho) < \frac{8\rho A(r)}{r-\rho} \tag{5}$$

et une inégalité analogue en remplaçant A par B ou en mettant des indices. On aurait entre α_n et μ_n une inégalité analogue; mais le nombre fixe auquel r devrait être supérieur serait variable avec n et par suite pourrait dépasser toute limite si on laisse n indéterminé. Il est nécessaire de reprendre en partie la démonstration qui a conduit à la formule (5); si nous désignons par $c_n + ic'_n$ le terme constant de Γ_n, c_n et c'_n étant réels, nous aurons (p. 365—366)

$$\mu_n(\rho) < |c_n| + |c'_n| + \frac{\rho}{r-\rho}[4\alpha_n(\rho) + 2|c_n|]. \tag{6}$$

Or on peut supposer c'_n compris entre $-\pi$ et $+\pi$; d'autre part, en désignant par $h + ki$ le terme constant de $G_1(z)$, on a

$$e^{2c_n} = h^2 + (k - 2n\pi)^2$$

et, par suite en désignant par H et K deux nombres indépendants de n

$$|c_n| < H + K \log |n|;$$

dans cette formule et les suivantes, si n est nul $\log |n|$ *doit être remplacé par zéro.* De là et de la formule (6) on conclut que l'on a, pourvu que r dépasse une valeur fixe *indépendante de n*

$$\mu_n(\rho) < \frac{8\rho[\alpha_n(r) + \log |n|]}{r - \rho} \tag{7}$$

pourvu que ρ soit plus petit que r. On pourrait d'ailleurs remplacer α_n par β_n.

Ceci posé, considérons un nombre quelconque r dépassant les limites fixées; ce nombre r, une fois choisi, restera fixe jusqu'à la fin du raisonnement. Nous pouvons, par hypothèse, donner à z une valeur z_0, de module r et telle que la partie réelle de $G(z)$ soit égale à $-B(r)$; on a alors

$$|e^{G_1(z_0)} - 1| = e^{-B(r)}. \tag{8}$$

Par suite, n étant un entier déterminé, on a

$$|G_1(z_0) - 2ni\pi| < 2e^{-B(r)}. \tag{9}$$

Le module de $G_1(z_0)$ étant au plus égal à $M_1(r)$, on conclut de là:

$$|n| < M_1(r). \tag{10}$$

Si nous faisons $z = z_0$ dans l'égalité (2), l'inégalité (9) deviendra

$$|e^{\Gamma_n(z_0)}| < 2e^{-B(r)}.$$

Or $\Gamma_n(z_0)$ a un module inférieur à $\mu_n(r)$; on a donc certainement:

$$\mu_n(r) > \frac{1}{2} B(r). \tag{11}$$

D'autre part, R désignant un nombre supérieur à r, l'égalité (2) montre que l'on a

$$e^{\alpha_n(R)} < M_1(R) + |2n\pi|$$

et en tenant compte de (10):

$$e^{a_n(R)} < 8M_1(R). \tag{12}$$

Remplaçons dans l'inégalité (7), r et ρ par R et r et tenons compte des inégalités (10) et (12); nous aurons:

$$\mu_n(r) < \frac{8r}{R-r}[\log M_1(R) + \log 8 + \log M_1(R)]$$

et, par suite, si R est assez grand pour que $M_1(R)$ dépasse 8^2

$$\mu_n(r) < \frac{20r}{R-r}\log M_1(R). \tag{13}$$

Les inégalités (11) et (13) donnent maintenant

$$B(r) < \frac{40r}{R-r}\log M_1(R). \tag{14}$$

Il nous suffit de joindre à cette dernière inégalité les inégalités (3), (4) et (5) pour aboutir à une impossibilité. Récrivons celles de ces inégalités qui nous seront utiles, en désignant par ρ' un nombre inférieur à ρ.

$$M(\rho) < \frac{8\rho}{r-\rho}B(r), \tag{15}$$

$$A(\rho) < M(\rho), \tag{16}$$

$$A_1(\rho) < 2A(\rho), \tag{17}$$

$$M_1(\rho') < \frac{8\rho'}{\rho-\rho'}A_1(\rho). \tag{18}$$

Il suffit de se servir successivement des inégalités (14—18) pour obtenir

$$M_1(\rho') < 40 . 8 . 2 . 8 \frac{r\rho\rho'}{(R-r)(r-\rho)(\rho-\rho')}\log M_1(R).$$

Nous pouvons supposer $R-r = r-\rho = \rho-\rho'$; nous voyons dès lors que, pourvu que R soit assez grand pour que l'on ait $\log M_1(R) < \frac{\sqrt{M_1(R)}}{100000}$, on aura

$$M_1(\rho') < \frac{R}{(R-\rho')^3}\sqrt{M_1(R)}.$$

Nous avons obtenu cette inégalité en prenant pour r un nombre fixe; il résulte de ce qui précède qu'elle sera vérifiée pourvu que R et ρ' dépassent des nombres fixes. On peut l'écrire aussi

$$M_1(R) > \frac{(R-\rho')^6}{R^6}[M_1(\rho')]^2.$$

Sous cette forme il suffit d'y faire successivement $\rho' = \lambda$, $R = \lambda + h$; $\rho' = \lambda + h$, $R = \lambda + h + \frac{h}{2}$; $\rho' = \lambda + h + \frac{h}{2}$, $R = \lambda + h + \frac{h}{2} + \frac{h}{4}$, etc., pour constater que si $M_1(\lambda)$ est assez grand et h convenablement choisi, $M_1(\lambda + 2h)$ dépasse toute quantité assignable, ce qui est absurde. Je crois inutile de détailler cette dernière partie du raisonnement, car un raisonnement identique a été fait plus haut (p. 366—368).

Conclusion.

J'ai, dans ce mémoire, indiqué quelques propositions générales importantes au sujet du nombre des zéros des fonctions entières. Mais je ne me dissimule pas que cette question exige encore des études approfondies et qu'il y aurait, notamment, grand intérêt à préciser davantage les résultats.

Pour nous borner aux fonctions de genre fini, l'étude des fonctions dont l'ordre est un nombre entier est encore à faire à peu près complètement. C'est là un genre de questions dont on ne peut, semble-t-il, espérer une solution totale; mais ce n'est pas une raison pour qu'on n'obtienne pas un grand nombre de résultats intéressants et utiles, comme on l'a fait pour les règles de convergence des séries.

Voici un ordre d'idées dans lequel on aboutirait peut être à des résultats intéressants et qui m'a été fort utile dans mes recherches. Étant donnée une fonction entière, donnons à z une valeur de module r et considérons le terme dont le module est le plus grand. Ce module est une fonction croissante de r, laquelle est à peu près du même ordre de grandeur que le maximum du module de la fonction; de sorte que l'on

peut dire que, si une fonction entière devient très grande lorsque le module de z augmente, c'est surtout parce que, pour chaque valeur du module, *un* terme devient très grand et non parce que *beaucoup* de termes deviennent très grands.

Pour chaque valeur r du module de z, le degré du terme le plus grand donne à peu près le nombre des racines de module inférieur à r (sauf le cas d'exception du théorème de M. PICARD). On peut rattacher cela à ce fait que les équations

$$F = 0,$$

$$F + \Phi = 0$$

ont le même nombre de racines[1] à l'intérieur d'un contour sur lequel

$$\left|\frac{\Phi}{F}\right| < 1.$$

Il y aurait lieu de rechercher quel est le degré de précision de ce résultat, en particulier dans le cas des fonctions d'ordre fini, mais non entier, pour lesquelles le facteur exponentiel par lequel on peut toujours multiplier la fonction, sans changer le nombre de ses racines, est nécessairement d'un ordre de grandeur inférieur à celui de la fonction elle même et peut, par suite, être négligé dans une première approximation. Pour ces fonctions, si l'on désigne par $\varphi(r)$ le maximum de leur module pour $|z| = r$, il y a lieu de comparer le nombre de leurs racines de module inférieur à r avec

$$\frac{1}{\pi}\log\varphi(r).$$

Il est à peu près certain que l'on obtient ainsi le nombre exact des racines, à des quantités près d'ordre inférieur, dans le cas particulier où leurs arguments tendent vers une limite déterminée lorsque le module augmente indéfiniment.

Le facteur $\frac{1}{\pi}$ est déterminé par la condition que la formule soit exacte pour e^z, ...

[1] HERMITE, cours d'analyse, 4e édition p. 182.

En appliquant cette formule à la fonction $\xi(t)$ de RIEMANN (laquelle a pour ordre 0,5 si l'on prend t^2 pour variable), on obtient pour le nombre des racines comprises entre O et T la formule

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$$

qui a été donnée par RIEMANN et dont M. VON MANGOLDT, complétant les résultats importants dus à M. HADAMARD, a démontré récemment l'exactitude, à des quantités près de l'ordre de $[\log T]^2$.

En terminant, je vais résumer rapidement les résultats acquis et indiquer en même temps les recherches qui se présentent naturellement.

On peut, à chaque fonction entière, faire correspondre une fonction croissante $\rho(r)$, qui peut se réduire à une constante positive (lorsque le genre est fini) et que l'on appelle son *ordre apparent. Cet ordre apparent ne dépend que la manière dont croît la fonction;* il se conserve ou se modifie d'une manière simple lorsqu'on combine entre elles par voie d'addition ou de multiplication plusieurs fonctions et leurs dérivées d'ordre quelconque.[1]

Cet ordre apparent joue un rôle analogue au degré dans la théorie des polynomes; en particulier, dans une identité, les termes d'ordre apparent maximum[2] doivent se détruire, ou tout au moins donner par leur combinaison un terme d'ordre moindre. On peut ainsi démontrer l'impossibilité de nombreuses identités; je me réserve d'appliquer cette remarque à la théorie des équations différentielles.

Enfin, appelons *ordre réel* d'une fonction entière une fonction croissante, pouvant aussi se réduire à une constante et *dépendant uniquement de la fréquence des zéros.* Nous aurons ce théorème fondamental: *sauf un cas exceptionnel* (que nous pouvons appeler cas de M. PICARD), *l'ordre apparent est égal à l'ordre réel.*

Que reste-t-il donc à faire? A préciser davantage encore la définition des *ordres* et par suite la définition de leur égalité. Si nous

---

[1] On peut aussi déduire l'ordre de la fonction $f[\varphi(z)]$ de la connaissance des ordres des fonctions entières f et φ.

[1] Les ordres apparents peuvent ne pas être comparables, alors chacun d'eux peut être regardé comme maximum, au point de vue des conséquences indiquées dans le texte.

nous bornons, pour plus de netteté, aux fonctions de genre fini, l'ordre est un nombre positif déterminé et il semble que la proposition: *l'ordre apparent est égal à l'ordre réel* soit suffisamment précise. On peut cependant espérer trouver mieux; l'ordre réel, par exemple, a été défini comme un nombre ρ tel que, a_n étant le module de la $n^{\text{ième}}$ racine, la série $\Sigma a_n^{-\rho-\varepsilon}$ soit convergente et la série $\Sigma a_n^{-\rho+\varepsilon}$ divergente, quelque petit que soit le nombre positif ε. Il est clair que la connaissance dunombre ρ ne suffit pas pour fixer la manière dont croit a_n lorsque n augmente indéfiniment. Par exemple, il peut exister un nombre positif ou négatif ρ' tel que la série $\Sigma a_n^{-\rho}(\log a_n)^{\rho'+\varepsilon}$ soit divergente et la série $\Sigma a_n^{-\rho}(\log a_n)^{\rho'-\varepsilon}$ convergente, quelque petit que soit ε; la connaissance des deux nombres ρ et ρ' est évidemment quelque chose de plus que la connaissance du seul nombre ρ, sans cependant suffire encore. On sait qu'on ne peut épuiser de telles difficultés (voir les travaux de MM. Du Bois Reymond, Pincherle, Hadamard sur les fonctions croissantes); mais on peut sans doute arriver à préciser plus que je ne l'ai fait la notion de l'ordre et c'est ce qui pourrait être utile dans certaines recherches. Il se pose alors la question de savoir si le théorème de l'égalité subsisterait entre les ordres ainsi précisés, ou s'il ne faudrait pas faire intervenir des notions nouvelles, par exemple les arguments des racines.

Saint Affrique (Aveyron), le 5 octobre 1896.

HUGO GYLDÉN.

Ein biographischer Umriss nebst einigen Bemerkungen über seine wissenschaftlichen Methoden

VON

KARL BOHLIN.

JOHAN AUGUST HUGO GYLDÉN wurde am 29 Mai 1841 in Helsingfors geboren. Sein Vater war der Professor der griechischen Sprache an der k. k. Alexanderuniversität, NILS ABRAHAM GYLDÉN. Die Mutter besass eine den damaligen Standpunkt der Frauenerziehung weit überragende Bildung und sogar eine ungewöhnliche Gelehrsamkeit. So wurde es Gyldén bescheert im elterlichen Hause eine umsichtsvolle und gründliche Unterricht zu geniessen. Er kam darauf in eine private Schule und wurde mit sechzehn Jahren 1857 als Student an der Universität eingeschrieben. Er widmete sich als solcher anfangs zwei Jahre der Chemie, wandte sich aber dann den astronomisch-mathematischen Disciplinen zu. Schon im Jahre 1860 promovirte er zum Phys. Math. Magister und zog darauf zur weiteren Ausbildung ins Ausland.

Die Reise ging nach Deutschland und zwar hielt er sich in den Jahren 1861—62 vornehmlich bei HANSEN, dem Altmeister der theoretischen Astronomie, in Gotha auf. Nachdem er noch Leipzig besucht hatte, kehrte er nach der Heimath zurück, um seine akademischen Studien zu beendigen. Inzwischen war eine Lehrerstelle für Astronomie an der Universität in Helsingfors frei geworden und Gyldén sandte auch aus Gotha, als er davon Nachricht bekommen hatte, an die Behörden ein Gesuch ein, das indessen zu spät ankam und desswegen vereitelt wurde. Nach der Rück-

kehr nach Helsingfors legte er 1862 das Licentiatexamen ab, wurde im December desselben Jahres zum Docenten der Astronomie und im folgenden Jahre zum Doctor der Philosophie ernannt.

Schon ehedem hatte Gyldén eine vorläufige Anstellung bei der Pulkowaer Sternwarte angenommen und wurde nun daselbst 1863 zum Adjunctastronomen und 1865 zum »älteren Astronomen» befördert. In Pulkowa entwickelte er als beobachtender Astronom eine aussergewöhnlich rege Thätigkeit, deren die Annalen der Pulkowaer Sternwarte Zeugniss ablegen, fand aber trotzdem die Musse, sich theoretischen Untersuchungen zu widmen. Seine *Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben* wie die Abhandlung *Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie* stammen aus dieser Zeit.

Einen bedeutungsvollen Wendpunkt seiner wissenschaftlichen Laufbahn brachte das Jahr 1871. Der Director der Sternwarte in Stockholm Nils Haquin Selander war gestorben und die Wahl der Academie der Wissenschaften fiel auf Gyldén als dessen Nachfolger. Er bekleidete dieses Amt als Astronom der Academie der Wissenschaften und Director der Sternwarte von 1871 an bis zu seinem Tode. Auf diesem Posten wurde es ihm ermöglicht, eine für die Astronomie sehr fruchtbare Wirksamkeit zu entfalten. Nicht nur dass seine Studien und Untersuchungen auf dem Gebiete der Störungstheorie und über verwandte Gegenstände in einer überaus lebhaften schriftstellerischen Thätigkeit sich entwickelten und mit der Zeit allmählig den Character eines definitiv ausgearbeiteten Systemes annahmen: er verstand es auch eine Reihe von Schülern, hauptsächlich aus Russland und Deutschland, heranzuziehen, die kürzere oder längere Zeit sich bei ihm über die Theorien der intermediären und absoluten Bahnen informirten und durch selbständige Arbeiten nicht unbedeutend zur Verbreitung der Kenntniss und zur Ausbildung jener Theorien beigetragen haben. Ein Theil dieser Untersuchungen sind in der von Gyldén gegründeten Publication *Astronomiska iakttagelser och undersökningar anstälda på Stockholms observatorium* veröffentlicht worden.

Als die theoretischen Grundlagen der intermediären und absoluten Bahnen der Himmelskörper, worüber Gyldén zum ersten Mal in drei in schwedischer Sprache geschriebenen Abhandlungen, *Undersökningar af teorien för himlakropparnes rörelser*, I—III, 1881—82, berichtete, soweit gediehen waren, dass zur numerischen Verwerthung derselben geschritten werden

konnte, bewilligte der schwedische Reichstag im Jahre 1884 eine Summe von 12,000 Kronen zur Ausführung von numerischen Rechnungen betreffend die absoluten Bahnen der grossen Planeten. Diese Rechnungen wurden auch sofort in Angriff genommen und kräftig gefördert. Für die meisten Combinationen der grossen Planeten wurden so die grundlegenden Rechnungen — Entwicklung der Störungsfunction und Integration der gewöhnlichen Störungsglieder — fertig gestellt. Ein, wenn auch nur sehr kleiner Theil der Resultate sind in dem nach seinem Tode erschienenen unvollendeten zweiten Theile seines Werkes *Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales* publicirt worden.[1]

Schon seit vielen Jahren hatte Gyldén an einem Herzleiden gelitten. Im vorigen Sommer nahm die Krankheit einen drohenden Character, schien sodann nach einem Aufenthalte in Nauheim etwas nachzugeben, aber nahm im Herbste wieder heftig zu. Am 9 November des vergangenen Jahres entriss ihn mitten im Schaffen der Tod seiner Familie und der Wissenschaft.

Gyldén war Mitglied der schwedischen Academie der Wissenschaften, der Wissenschaftssocietät in Upsala, der Wissenschaftssocietät in Helsingfors, der französischen Academie als Nachfolger Secchi's, der russischen Academie der Wissenschaften, der Royal Astronomical Society und anderer gelehrten Gesellschaften. Von 1889 bis 1896 fungirte er als Vorsitzender der Astronomischen Gesellschaft. Im Jahre 1879 wurde ihm eine Professorsstelle in seiner Vaterstadt und zwei mal wurden ihm im Auslande Professorsstellen angeboten, einmal 1876 in Gotha, das andere Mal 1884 in Göttingen. Bei dieser letzten Gelegenheit hatte er auch eine Übersiedlung auf deutschen Boden ernstlich erwogen, liess sich aber auf den besonderen Wunsch der Academie der Wissenschaften hin bewegen, seine Absicht aufzugeben. Seinem Wunsch durch Vorlesungen zu wirken wurde bei dieser Gelegenheit durch besonders für den Zweck zur Disposition gestellten Mittel entsprochen. Von 1888 an war er als Lehrer der Astronomie bei der Hochschule in Stockholm thätig. Seit der Gründung dieser Zeitschrift gehörte er ihrer Redaction.

Der mathematische Inhalt der Publicationen Gyldéns ist mit seinen astronomischen Untersuchungen so nahe verbunden, dass es schwer fällt, die mathematischen Resultate von den astronomischen Aufgaben, deren

[1] Die Fortsetzung dieser Untersuchungen ist von Herrn Director O. Backlund übernommen worden.

Lösung er nachstrebte, zu trennen. Ohne Zweifel würde es leichter sein, eine Vorstellung der durch ihn erlangten astronomischen Resultate auf dem Gebiete der Störungen zu bilden, ohne die mathematischen Methoden zur Hülfe zu nehmen, deren er sich bediente. Die gewonnenen Resultate dürften nämlich durch allgemeinere functionstheoretische Methoden und auf anderen Wegen, als die elliptischen Functionen ihm eröffneten, wiedergefunden werden können. Allerdings haben sich die elliptischen Functionen in seinen Händen als sehr fruchtbar erwiesen, indem nämlich die genau studirten Eigenschaften, die diese Functionen über die trigonometrischen hinaus besitzen, bei der Anwendung auf die Astronomie unmittelbar verwerthet werden konnten. Ein weiterer Vortheil der Anwendung dieser Functionen lag darin, dass die von Herrn Hermite behandelte s. g. Lamé-sche Differentialgleichung benutzt werden konnte, um eine erste Verbesserung eines durch einfache Verbindungen elliptischer Functionen dargestellten preliminären Resultates abzuleiten. Wollte man aber die Annäherungen über diesen Genauigkeitsgrad fortsetzen, so wäre man in der Regel zu elementären Hülfsmitteln zurückgewiesen. Die elliptische Functionen sind in dem Sinne ein Mittel, durch welches es ermöglicht wird, zu einem gewissen Grade in das Störungsproblem einzudringen, eignen sich aber weniger um dasselbe nach einem einheitlichen Algoritmus endgültig zu behandeln. Diesem Umstande sind die Schwierigkeiten zuzuschreiben, welche Gyldéns Methoden darbieten. In dieser Zeitschrift hat Gyldén seine Untersuchungen über das allgemeine Problem der Störungen mit besonderer Rücksicht auf die Convergenz der Reihen in zwei grösseren Abhandlungen: *Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden,* Acta mathematica 9, 1887 und *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes,* Acta mathematica 15, 1891; 17, 1892, veröffentlicht. Dieselben sind in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft für 1893 umständlich analysirt worden. In der ersten dieser Abhandlungen wird die Ermittlung der sog. *characteristischen Glieder* auf eine Reihe ähnlicher Operationen durch elliptische Functionen in überraschend eleganter Weise zurückgeführt. Der interessanteste Gegenstand der zweiten Abhandlung, nämlich der Versuch, die Convergenz der Reihen im Anschluss an gewissen höheren Potenzen der Unbekannten mittels sog. *horistischer Glieder*, welche durch die Transformationen in den Differen-

tialgleichungen entstehen, festzustellen, entbehrt hier die Klarheit einer endgültigen Darstellung und beschäftigte Gyldén noch immer in der letzten Zeit.

Abgesehen von diesen Convergenzfragen besitzen die astronomischen Methoden Gyldéns einen unstreitbaren Vorzug vor anderen, älteren Methoden. Vom Anfange seiner Untersuchungen über die allgemeinen Störungen an war es nämlich sein Streben, dieselben in rein periodischer Form darzustellen. Die in einer solchen analytischen Form dargestellte Bahn eines Himmelskörpers nannte er eine *absolute,* weil dieselbe für alle Zeiten von der wirklichen Bahn nur um kleine periodische Grössen von der Ordnung der Masse sich unterscheidet. Die wirkliche Berechnung solcher Bahnen führt zu einer gewissen Wahl von Integrationsconstanten, für welche Gyldén auch eine besondere Terminologie aufgestellt hat. Diese Theorie der absoluten Bahnen entspricht nach den älteren Störungstheorien den s. g. *sæcularen Störungen.* Seine umfassenden Untersuchungen über diesen Gegenstand hat Gyldén im ersten Theile seines unvollendeten Werkes: *Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales,* Stockholm 1893, nachgelassen.

Aber nicht nur für die Theorie der allgemeinen Störungen bieten die elliptischen Functionen eine vortheilhafte Anwendung, indem man gewisse Glieder aus der Störungsfunction mit den Differentialgleichungen schon bei der ersten Näherung vereinigt, wodurch diese, die ja ohne jene Glieder zu Ausdrücken rein trigonometrischer Art führen, durch elliptische Functionen integrierbar werden. Für gewisse Fälle, besonders bei der numerischen Berechnung sehr excentrischer Bahnen wie derjenigen der Cometen, hat Hansen einen praktisch sehr schätzbaren Kunstgriff eingeführt, ohne welchen sogar eine analytische Behandlung solcher Fälle scheitert. Der Grundgedanke des Verfahrens ist folgender. Die Bahn des Himmelskörpers wird in zwei oder mehreren Theilen zerlegt und für jeden Theil drückt man die Coordinaten durch ein besonderes Hülfsargument aus. Dieses Argument — die sog. *partielle Anomalie* — wird in einer solchen Weise gewählt, dass dasselbe von 0° bis 180° variirt, während der Himmelskörper den betreffenden Theil der Bahn beschreibt. Ausserhalb der Grenzen dieses Theilgebietes verlieren die nach der partiellen Anomalie entwickelten Reihen ihre Gültigkeit. Wie Gyldén zuerst gezeigt hat, bieten sich die elliptischen Functionen fast von selbst zur Einführung solcher partieller Anomalien und

sind ausserdem wegen der raschen Convergenz der Reihenentwicklungen für diesen Zweck sehr geeignet. Gyldéns erste grössere theoretische Arbeit, *Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie*, I, Petersburg 1871, behandelt die Aufgabe, besondere für den genannten Zweck nutzbare Entwicklungen der elliptischen Functionen herzustellen. Ein Theil der betreffenden Resultate waren wohl schon von C. O. Meier im 37 Bande von Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik angegeben. Weil sie aber weder für die praktische Benutzung gestellt oder hinreichend vollständig waren, entschloss sich Gyldén, eine neue Behandlung der Frage im Anschluss an die *Fundamenta* Jacobi's vorzunehmen. Diese Abhandlung enthält zuerst trigonometrische Entwicklungen von Potenzen der elliptischen Functionen wie $\left(\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} x\right)^{2n}$, $\left(\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} x\right)^{2n+1}$ u. s. w. für $n = 0, 1, 2$. Von besonderem Interesse sind die darauf folgenden Entwicklungen für grosse n-Werthe von gewissen elliptischen Integralen, wie z. B.

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \frac{\pi}{2k}\,\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2n+2}\,\frac{k^2}{k'^2} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1.3}{(2n+2)(2n+4)}\left(\frac{k^2}{k'^2}\right)^2 \ldots\right\}.$$

Diese Reihenentwicklungen eignen sich für grosse Werthe von n zur numerischen Rechnung, sind aber für $\frac{k}{k'} > 1$, also für den Fall, der bei Cometenbahnen vorzugsweise vorkommt, halbconvergent. Hierauf folgen Entwicklungen von Potenzen gewisser Producte elliptischer Functionen und zum Schluss Entwicklungen bei dem Auftreten von Vielfachen einer Amplitudo wie z. B. die Bestimmung der Coëfficienten der Reihe

$$\sin\left(n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} x\right) = 2\sum_1^n \sin x + 2\sum_2^n \sin 2x + \ldots.$$

Als eine Eigenthümlichkeit für die Deduction dieser Resultate kann erwähnt werden, dass der Verfasser sich des Fourier'schen Theoremes nicht bedient, sondern gewisse dreigliedrige Recursionsformeln zwischen den Coëfficienten aufstellt, die dann, als Differenzgleichungen betrachtet, nach der Laplace'schen Methode integrirt werden.

Zu den interessantesten Arbeiten Gyldéns gehören zwei Abhandlungen, die mit der Frage von partiellen Anomalien nahe zusammenhängen, nämlich *Om summationen af periodiska serier*, Stockholm 1872, und *Sur la sommation des fonctions périodiques*, Annales de l'école normale 1879. Eins der Hauptresultate dieser Abhandlungen ist eine Generalisation der sog. MAC LAURIN'schen Formel

$$z_s = \frac{1}{\pi} \operatorname*{Lim}_{k=\infty} \int_0^{s\pi} F(t) \frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} dt$$

zu einer Relation von der Form

$$z_s = \frac{1}{2} \int_0^{s\pi} \left\{ F(t) + b_1^{(i)} \frac{d^2 F(t)}{dt^2} + \ldots + b_i^{(i)} \frac{d^{2i} F(t)}{dt^{2i}} \right\} \chi_i(t) dt.$$

Im Zusammenhange mit dieser Formel steht die bemerkenswerthe Entwicklung eines Bogens ϑ in die periodische Reihe

$$\vartheta = \sum_1^{\infty} \beta_{2n}^{(i)} \sin 2n\vartheta + \frac{\pi}{2} \sum_0^{i} \alpha_{2n+1}^{(i)} \sin(2n+1)\vartheta \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right),$$

so auch ganz ähnliche Reihenentwicklungen für $\sin\mu\vartheta$, $\cos\mu\vartheta$, wo μ eine irrationale Zahl bedeutet. Diese Formeln ergeben sich, wenn man sich die Aufgabe stellt, eine Entwicklung von $(\cos\vartheta)^{2i+1}$ nach geraden Vielfachen von ϑ

$$C_0^{(i)} - 2C_2^{(i)} \cos 2\vartheta - 4C_4^{(i)} \cos 4\vartheta - \ldots$$

zu finden, und wurden schon 1867 von Gyldén in seiner Abhandlung *Relationer mellan cosiner och siner för irrationella vinklar*, Helsingfors 1867, gegeben. Mit diesen Reihenentwicklungen aufs engste verbunden ist die Theorie für den sog. *separirenden Factor* — eine periodische Reihe der oben erwähnten Art, die innerhalb der angegebenen Grenzen einen constanten Werth z. B. die Einheit darstellt, ausserhalb derselben aber eine gewissermassen beliebige Werthfolge representirt.

Von späteren Untersuchungen auf dem rein mathematischen Gebiete legte Gyldén selbst auf dem kleinen Aufsatze *Om sannolikheten att påträffa stora tal vid utvecklingen af irrationela decimalbråk i kedjebråk*, Stockholm 1888, einen besonderen Werth.

Die Zahl der Publicationen Gyldéns beläuft sich auf nicht viel weniger als zwei hundert. Für das Verzeichniss über dieselben gestatten wir uns auf eine demnächst in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft erscheinende Biographie hinzuweisen. Das meiste dieser grossen schriftstellerischen Wirksamkeit bezieht sich auf astronomische Fragen. Aber ausser der verschiedensten Gegenständen der theoretischen und praktischen Astronomie, die in dieser langen Reihe von grösseren und kleineren Abhandlungen und Zeitschriftpublicationen vertreten sind, finden wir auch eine Anzahl Aufsätze über Versicherungswesen sowie Vorträge und Mittheilungen in philosophischen und socialen Fragen.

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 20. — 1896—1897. — TOME 20.

	Seite. Pages.
BOHLIN, KARL. Hugo Gyldén. Ein biographischer Umriss nebst einigen Bemerkungen über seine wissenschaftlichen Methoden	397—404
BOREL, EMILE. Sur les zéros des fonctions entières	357—396
EPSTEIN, P. Zur Lehre von den hyperelliptischen Integralen	1— 58
HADAMARD, J. Mémoire sur l'élimination	201—238
HURWITZ, A. Sur l'intégrale finie d'une fonction entière	285—312
LIOUVILLE, R. Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points	239—284
POINCARÉ, H. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet	59—142
POINCARÉ, H. Sur la polarisation par diffraction. (Seconde Partie)	313—356
WEINGARTEN, JULIUS. Sur la déformation des surfaces	159—200
WERTHEIM, G. Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^{\kappa}g^{\lambda}+1$, in welcher $g=1$ oder eine ungerade Primzahl ist	143—152
WERTHEIM, G. Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller Primzahlen p zwischen 3000 und 5000. (Fortsetzung der Tabelle aus Band 17. Seite 315)	153—158

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT — JOURNAL

HERAUSGEGEBEN — RÉDIGÉ

VON — PAR

G. MITTAG-LEFFLER

20 : 1

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1896.

BERLIN
MAYER & MÜLLER
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

Ausgegeben den 31. Januar 1896. — Paru le 31 janvier 1896.

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

	Seite. Pages.
EPSTEIN, PAUL, Zur Lehre von den hyperelliptischen Integralen	1— 58
POINCARÉ, H., La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet	59—142
WERTHEIM, G., Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^{\kappa} q^{\lambda} + 1$, in welcher $q = 1$ oder eine ungerade Primzahl ist...	133—152

Von diesem Bande werden einige Exemplare auf holländischem Papier zum Preise von 24 Mark verkauft.

Il est tiré de ce volume quelques exemplaires sur papier de Hollande au prix de 30 francs.

Preis des Bandes: 15 Mark. — Prix par volume: 18,75 francs.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT JOURNAL

291
096

HERAUSGEGEBEN RÉDIGÉ

VON PAR

G. MITTAG-LEFFLER

20: 2

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1896.

BERLIN
MAYER & MÜLLER
MARKGRAFENSTRASSE 51.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN,
8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

Ausgegeben den 30. September 1896. — Paru le 30 septembre 1896.

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

Seite. Pages.

Wertheim, G., Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller Primzahlen p zwischen 3000 und 5000. (Fortsetzung der Tabelle aus Band 17, Seite 315) .... 153—158

Weingarten, Julius, Sur la déformation des surfaces .... 159—200

Hadamard, J., Mémoire sur l'élimination .... 201—238

Von diesem Bande werden einige Exemplare auf holländischem Papier zum Preise von 24 Mark verkauft.

Il est tiré de ce volume quelques exemplaires sur papier de Hollande au prix de 30 francs.

Preis des Bandes: 15 Mark. — Prix par volume: 18,75 francs.

Mit diesem Heft folgt ein Circular betreffend die Werke von Descartes.

Avec ce cahier est distribuée une circulaire sur les Oeuvres de Descartes.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT JOURNAL

HERAUSGEGEBEN RÉDIGÉ

VON PAR

150
198

G. MITTAG-LEFFLER

20: 3 & 4

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

BERLIN 1897. PARIS

MAYER & MÜLLER. A. HERMANN.

MARKGRAFENSTRASSE 51. CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM. 8 RUE DE LA

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

	Seite. Pages.
LIOUVILLE, R., Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points	239—284
HURWITZ, A., Sur l'intégrale finie d'une fonction entière	285—312
POINCARÉ, H., Sur la polarisation par diffraction. (Seconde partie)	313—356
BOREL, EMILE, Sur les zéros des fonctions entières	357—396
BOHLIN, KARL, Hugo Gyldén. Ein biographischer Umriss nebst einigen Bemerkungen über seine wissenschaftlichen Methoden	397—404